

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет»

На правах рукописи



Нгуен Мань Кыонг

**МЕТОДИКА РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКОГО И ДИНАМИЧЕСКОГО
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ**

2.5.14 – «Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов»

Диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук

Научный руководитель:

Кандидат технических наук, доцент

Красноруцкий Дмитрий Александрович

Новосибирск 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|----|
| ВВЕДЕНИЕ | 4 |
| ГЛАВА 1 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ, СВЯЗАННЫХ С ТЕМОЙ ДИССЕРТАЦИИ | 11 |
| 1.1 Методы расчёта деформирования оболочек | 11 |
| 1.2 Методы расчёта колебаний баков с жидкостью | 13 |
| 1.3 Радиальные базисные функции | 15 |
| Выводы по главе 1 | 19 |
| ГЛАВА 2 СТАТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ.... | 21 |
| 2.1 Общие уравнения оболочек в глобальных координатах..... | 21 |
| 2.2 Вывод определяющих уравнений для осесимметричной оболочки..... | 27 |
| 2.3 Программная реализация и тестовые расчёты | 37 |
| 2.3.1 Цилиндрическая оболочка | 37 |
| 2.3.2 Сферическая оболочка..... | 44 |
| 2.3.3 Эллиптическая оболочка | 47 |
| 2.3.4 Коническая оболочка | 51 |
| 2.3.5 Составная оболочка | 54 |
| Выводы по главе 2..... | 57 |
| ГЛАВА 3 ДИНАМИКА ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ | 59 |
| 3.1 Общие уравнения движения ортотропной оболочки | 59 |
| 3.2 Уравнения движения осесимметричной ортотропной оболочки..... | 61 |
| 3.3 Методика решения задачи о малых колебаниях оболочки..... | 66 |
| 3.4 Сопряженная задача гидроупругости | 69 |
| 3.5 Применение RBF-FD для построения разностной схемы краевой задачи о колебаниях жидкости..... | 70 |
| 3.6 Приведение уравнений к безразмерному виду для случая стыковки нескольких оболочек..... | 76 |
| Выводы по главе 3..... | 80 |

| | |
|---|-----|
| ГЛАВА 4 ТЕСТИРОВАНИЕ МЕТОДИКИ РАСЧЁТА КОЛЕБАНИЙ | 82 |
| 4.1 Тестирование методики расчёта собственных колебаний ортотропной оболочки без жидкости..... | 82 |
| 4.2 Тестирование методики расчёта гидроупругих колебаний..... | 83 |
| 4.2.1 Полусферический бак | 83 |
| 4.2.2 Составная оболочка с жидкостью | 87 |
| 4.2.3 Цилиндрический бак..... | 88 |
| 4.2.4 Тороидальный бак..... | 89 |
| 4.3 Тестовые расчёты гидроупругих колебаний связок баков | 91 |
| 4.3.1 Связка цилиндрических баков с полусферическим дном..... | 91 |
| 4.3.2 Тороидальный бак с промежуточным днищем..... | 96 |
| 4.3.3 Тороцилиндрический бак | 102 |
| Выводы по главе 4..... | 108 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 110 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ..... | 112 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ А ТЕКСТ ПРОГРАММЫ РЕШЕНИЯ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ | 128 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ Б СКРИПТЫ APDL ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ..... | 139 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ В АКТ ВНЕДРЕНИЯ | 142 |

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

Самыми распространёнными структурными единицами авиационной и ракетно-космической техники являются тонкостенные элементы (оболочки). Математические модели конструкций летательных аппаратов, создаваемые для анализа напряжённо-деформированного состояния, сопровождают все этапы их жизненного цикла от эскизного проектирования до эксплуатации. В частности, при создании ракет-носителей (РН) с жидкостным ракетным двигателем, анализ математической модели необходим для решения задачи обеспечения продольной устойчивости на активном участке полёта. Возмущение от тяги двигателя через корпус РН передаётся жидкостным бакам, это приводит к изменению давления в топливной системе и тяги двигателя. Образуется замкнутый контур, который при неблагоприятном сочетании частот собственных колебаний может привести к автоколебаниям типа «пого» и разрушению. Баки с топливом, обычно представляющие собой большие тонкостенные тела вращения (осесимметричные оболочки), составляют 85–90 % от стартовой массы и вносят определяющий вклад в динамику РН. Поэтому необходимо создавать их математические модели для принятия мер по отстройке потенциально опасных частот и предотвращения автоколебаний.

Анализ публикаций по методикам расчёта частот гидроупругих колебаний баков показывает, что существующие подходы при всём многообразии не обладают единством получаемых результатов даже на тестовых задачах. В связи с этим актуальным является создание новой методики расчёта осесимметричных гидроупругих колебаний оболочек вращения на основе современных численных методов. Она может использоваться для обеспечения прочности объектов ракетно-космической техники, в частности, для создания механических аналогов топливных баков при решении задачи о продольной устойчивости РН, а также для тестирования существующих и новых подходов к расчёту.

Степень разработанности темы исследования

Тема анализа напряжённно-деформированного состояния оболочек достаточно хорошо разработана мировым научным сообществом, имеется множество вариантов систем уравнений и способов их решения, обладающих своими преимуществами и недостатками. Классические модели теории оболочек построены на гипотезе Кирхгофа – Лява. Большой вклад в развитие классических моделей внесли советские ученые: Власов В. З., Гольденвейзер А. Л., Лурье А. И., Муштари Х. М., Новожилов В. В., Работнов Ю. Н., Филин А. П., Бидерман В. Л., Биргер И. А. и др. Неклассическими теориями оболочек занимались: Тимошенко С. П., Рейснер Э., Жилин П. А., Баженов В. Г., Болотин В. В., Аннин Б. Д., Григолюк Э. И., Паймушин В. Н., Черных К. Ф., Балабух Л. И., Абросимов Н. А., Вольмир А. С., Немировский Ю. В. и др.

Для определения динамических характеристик тонкостенных конструкций с жидкостью проводят экспериментальные и численные исследования. Существует множество подходов к расчёту: точные решения для частных случаев геометрии и граничных условий, приближённые методы оценки на основе усеченного разложения решения по некоторому базису, интегральные подходы на основе минимизации функционалов энергий, в том числе варианты метода конечных элементов (МКЭ), метода граничных элементов (МГЭ) и др. В разработку теорий и методов расчёта колебаний тел с жидкостью внесли вклад: Жуковский Н. Е., Колесников К. С., Моисеев Н. Н., Рабинович Б. И., Румянцев В. В., Луковский И. А., Балакирев Ю. Г., Шмаков В. П., Stokes С., Лампер Р. Е., Abramson Н. N., Bauer Н. F., Miles Y. W., Мокеев В. В., Шклярчук Ф. Н., Григорьев В. Г., Пожалостин А. А., Левин В. Е., Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В., Грибков В. А. и др.

Цель диссертационной работы

Разработать методику расчёта деформирования осесимметричных оболочек вращения, в том числе взаимодействующих с идеальной несжимаемой жидкостью, основанную на современных численных методах и предназначенную для

моделирования продольных колебаний топливных баков ракет-носителей, чтобы обеспечить их прочность.

Задачи исследования

1) Получить уравнения статического и динамического осесимметричного деформирования оболочек вращения на основе разрешающих функций в глобальной системе координат с учётом больших деформаций, эффекта утонения и поперечного сдвига.

2) Разработать методику расчёта осесимметричных колебаний ортотропных оболочек вращения с идеальной несжимаемой жидкостью, для моделирования гидроупругих колебаний топливных баков с произвольной формой меридиана и возможностью подкрепления упругими шпангоутами с дополнительными массами.

3) Провести тестирование предложенной методики и исследовать сходимость получаемых результатов расчёта статического деформирования, а также частот гидроупругих колебаний моделей баков.

Научная новизна

1) Получены новые дифференциальные уравнения осесимметричного статического и динамического деформирования ортотропных оболочек вращения на основе разрешающих функций в глобальной системе координат, учитывающие утонение/утолщение при больших деформациях и поперечный сдвиг по типу модели Тимошенко.

2) Разработана новая методика расчёта осесимметричных колебаний ортотропных оболочек вращения с идеальной несжимаемой жидкостью методом конечных разностей, в котором для генерирования весовых коэффициентов аппроксимации уравнения Лапласа и граничных условий на произвольном трафарете (шаблоне) узловых точек используется сплайн-интерполяция на основе полигармонических радиальных базисных функций.

3) В результате исследования корректности и сходимости предложенной методики получены новые расчётные данные — частоты гидроупругих осесимметричных колебаний оболочек вращения, которые могут быть

использованы другими исследователями для анализа достоверности существующих и новых подходов к расчёту.

Теоретическая и практическая значимость

Теоретическую значимость представляет предлагаемый подход к построению кинематических соотношений и уравнений равновесия оболочек на основе представления разрешающих функций в глобальной системе координат с использованием вектора конечного поворота (вектора Эйлера), что позволяет учитывать произвольную начальную геометрию срединной поверхности (с изломами и скачками кривизны), а также учесть влияние поперечного сдвига без использования в уравнениях пространственных производных второго порядка и ввода дополнительных разрешающих функций.

Практическая значимость разработанной методики расчёта механики осесимметричных колебаний ортотропных оболочек вращения с идеальной несжимаемой жидкостью состоит в возможности моделировать продольные гидроупругие колебания связки топливных баков ракетно-космической техники с учётом подкреплений шпангоутами и дополнительными массами от агрегатов. Частоты и формы колебаний необходимы для построения механических аналогов баков, которые включаются в общую динамическую модель всего аппарата, используемую для обеспечения его прочности.

Методология и методы исследования

При выводе дифференциальных уравнений использовалась классическая теория оболочек, с добавлением элементов неклассической теории Тимошенко. Численное решение получено классическим методом конечных разностей, а также его современной разновидностью, называемой Radial Basis Function–Finite Difference (RBF-FD), в которой весовые коэффициенты аппроксимации дифференциальных операторов на произвольном трафарете (шаблоне) определяются с помощью сплайн-интерполяции радиальными базисными функциями.

Положения, выносимые на защиту

1) Система дифференциальных уравнений осесимметричного статического и динамического деформирования ортотропных оболочек вращения на основе разрешающих функций в глобальной системе координат, учитывающая утонение/утолщение при больших деформациях и поперечный сдвиг по типу модели Тимошенко.

2) Методика расчёта осесимметричных колебаний ортотропных оболочек вращения с идеальной несжимаемой жидкостью методом конечных разностей, в котором для генерирования весовых коэффициентов аппроксимации дифференциальных операторов на произвольном трафарете узловых точек используется сплайн-интерполяция на основе полигармонических радиальных базисных функций, предназначенная для моделирования продольных гидроупругих колебаний связки топливных баков ракетно-космической техники с учётом подкреплений шпангоутами и дополнительными массами от агрегатов.

3) Результаты исследования корректности предложенной методики на примерах решения тестовых задач статического деформирования оболочек вращения разной геометрической формы под действием внутреннего давления, а также расчётов частот и форм гидроупругих осесимметричных колебаний некоторых топливных баков.

Степень достоверности и апробация результатов работы

Достоверность полученных результатов работы подтверждается хорошим соответствием с опубликованными экспериментальными и расчётными данными, а также с результатами проведенных расчётов в сертифицированном программном комплексе ANSYS и программе Левина В.Е., реализующей метод конечных и граничных элементов.

Результаты диссертационной работы обсуждались на:

1. Конференциях молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации» в декабре 2022 и 2023 г.

2. Научных семинарах кафедры «Прочность летательных аппаратов» Новосибирского государственного технического университета (НГТУ), март 2023 и 2024 г.
3. Научном семинаре кафедры «Механика твердого тела» Новосибирского государственного университета (НГУ) под руководством академика РАН д.ф.-м.н. Аннина Б.Д., февраль 2024 г.
4. Семинаре научного направления «Механика деформируемого твердого тела» "Механика макро- и нано-структур" института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева (ИГиЛ СО РАН) под руководством д.ф.-м.н. Коробейникова С. Н. и д.ф.-м.н. Шутова А. В., февраль 2024 г.
5. Научном семинаре сибирского научно-исследовательского института авиации имени С. А. Чаплыгина (СибНИА), март 2024 г.
6. Научном семинаре в Новосибирском Государственном архитектурно-строительном университете – НГАСУ (Сибстрин), март 2024 г.
7. Научном семинаре института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук под руководством академика РАН д.т.н. Матвеевко В.П., март 2024 г.
8. Международной научно-практической конференции «IX Чаплыгинские чтения», посвящённой 155-летию со дня рождения Сергея Алексеевича Чаплыгина, апрель 2024 г.

Личный вклад автора

Вывод линейных и нелинейных дифференциальных уравнений статического и динамического деформирования осесимметричных оболочек вращения, разработка методики расчёта гидроупругих колебаний баков, разработка программ для тестовых расчётов на языке Fortran и скриптов ANSYS, проведение тестовых расчётов, исследование достоверности и сходимости полученных результатов.

Соответствие паспорту заявленной специальности

Содержание диссертационной работы соответствуют паспорту научной специальности 2.5.14 – «Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов» по:

пункту 1 – «Методы определения внешних силовых и тепловых нагрузок, действующих на объекты авиационной, ракетной и космической техники на этапах транспортировки, применения и эксплуатации» – для определения динамической нагрузки на ракету с ЖРД, необходимо рассчитывать гидроупругие колебания топливных баков, которые моделируются осесимметричными оболочками вращения, взаимодействующими с жидкостью.

пункту 2 – «Обеспечение прочности объектов авиационной, ракетной и космической техники на основе современных аналитических и численных методов, методов натурного и полунатурного моделирования в условиях стационарных и нестационарных внешних воздействий» – методика расчёта статического и динамического деформирования осесимметричных оболочек вращения основана на использовании современных численных методов и предназначена для расчёта прочности элементов конструкций авиационной и ракетно-космической техники, которые можно схематизировать оболочками вращения.

Публикации

Основные результаты работы по теме диссертации изложены в 3 печатных работах, из которых 2 статьи опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК РФ, в том числе из них 1 статья индексируется библиографической базой данных «Scopus», и 1 – в сборнике трудов всероссийской научно-технической конференции.

Структура и объём работы

Диссертация изложена на 142 листах, имеет 64 рисунка, 23 таблицы и 3 приложения. Библиографический список состоит из 137 наименований трудов российских и зарубежных учёных.

ГЛАВА 1 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ, СВЯЗАННЫХ С ТЕМОЙ ДИССЕРТАЦИИ

1.1 Методы расчёта деформирования оболочек

Развитие строительных, авиационных, космических, судостроительных отраслей неразрывно связано с использованием тонкостенных конструкций. Наука об оболочках относительно молода: она появилась в 19 веке и стала бурно развиваться в 20–21 столетии по пути построения практических методов расчёта. Традиционно учёными строились аналитические и приближённые решения для частных случаев геометрических форм, вариантов граничных условий, видов нагрузки, различных моделей материалов. Обзор подходов, методов решения и моделей теории пластин и оболочек приведён в работе [1]. Существенный вклад в исследование деформирования пластин и оболочек был сделан учеными благодаря развитию метода конечных элементов (МКЭ), который является универсальным и постоянно совершенствующимся инструментом в сочетании с современными возможностями вычислительной техники. В большой части инженерной и научной среды сложилось убеждение, что современные САЕ-пакеты прикладных программ на основе МКЭ, такие как ANSYS, Femap, Abaqus, MSC.Marc и много других, удовлетворили все потребности как инструменты в исследовании напряжённо-деформированного состояния сплошных сред. С этим сложно не согласиться, универсальность и относительная простота программной реализации МКЭ сделала его, пожалуй, самым популярным численным подходом к решению задач механики, в том числе для расчёта деформированного состояния оболочек. Тем не менее, отдельными учёными предпринимаются шаги по созданию и развитию альтернативных МКЭ подходов, нацеленных как на решение отдельных задач, так и на создание универсальных методов.

Интересным и перспективным направлением в развитии альтернативных подходов к расчёту оболочечных конструкций представляется применение

бессеточных методов перидинамики [2, 3]. В работе [4] применяется метод граничных элементов для расчёта оболочечных конструкций, результаты сравниваются с расчётом методом конечных разностей (МКР). В монографии [5] изложен вариационно-разностный подход к расчёту конструкций, приведён глубокий обзор работ по уточнённым теориям оболочек. В статье [6] изложен метод неявных конечных разностей (МНКР), который позволяет, исходя из формулировки краевой задачи в перемещениях и напряжениях как независимых между собой основных величин разрешающей системы уравнений, определять напряжения с более высокой точностью, чем МКЭ в форме метода перемещений. В работе [7] для решения задачи устойчивости цилиндрической оболочки, под действием неравномерной нагрузки используется метод на основе сплайн-интерполяции. В статье [8] обсуждается и анализируется применение вариационно-разностного метода к расчёту линейных и нелинейных задач деформирования тонких и толстых оболочек из композитных и изотропных материалов. В работах [9, 10, 11, 12] используется метод дифференциальных квадратур для аппроксимации производных некоторых дифференциальных уравнений механики и краевых условий, что позволяет свести их решение краевой задачи к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений разрешающих функций. В [13] приведён численный анализ устойчивости явной разностной схемы высокого порядка для расчёта осесимметричных оболочек вращения под действием импульсных нагрузок. В работах [14, 15] рассматривается деформирование мягкой оболочки из высокоэластичного материала, для расчёта применяется метод дифференцирования по параметру, позволяющий свести решение нелинейной краевой задачи к совокупности квазилинейной краевой и нелинейной начальной задач и применить метод начальных параметров решения линейных краевых задач. В работе [16] используется, по сути, метод пристрелки для решения двухточечной краевой задачи деформирования мембраны, как осесимметричной оболочки вращения, проводится анализ устойчивости и построение форм равновесия до и после точек бифуркаций. В статье [17] применяется МКР для расчёта оболочки в форме эллиптического параболоида с

шарнирно-неподвижным опиранием. В работе [18] МКР применяется для расчёта напряжённо-деформированного состояния композитной оболочки вращения. В статье [19] рассматривается численное решение МКР уравнений классической теории оболочек для описания напряжённо-деформированного состояния сильфона U-образного компенсатора при нагрузке внутренним давлением. В [20] МКР используется для расчёта прямоугольной плиты на упругом основании, произведена верификация с результатами расчётов, выполненных с помощью двойных тригонометрических рядов. В статье [21] с помощью МКР проводится анализ устойчивости пластин и оболочек в условиях ползучести для элементов конструкций из материалов, обладающих свойством старения, находящихся под действием длительных нагрузок.

Настоящая работа является логическим продолжением и развитием идеи, заложенной в статье [22] с обобщением уравнений на геометрическую нелинейность, произвольную параметризацию меридиана, учёт изменения толщины и поперечного сдвига при деформировании. Для получения численного решения применён алгоритм [23, 24] на основе метода конечных разностей, обладающий лучшей сходимостью, по сравнению с методом пристрелки, используемым в работе [22], а также имеющий возможность получать непосредственную оценку достигнутой точности численного решения.

1.2 Методы расчёта колебаний баков с жидкостью

Осесимметричными оболочками вращения можно схематизировать топливные баки ракет-носителей с жидкостным ракетным двигателем (ЖРД), резервуары для нефтепродуктов, баллоны высокого давления, взрывные камеры, купольные конструкции. Одной из проблем проектирования ракет с ЖРД является проблема продольной устойчивости (англ. POGO) [25]. Если частота колебаний корпуса ракеты близка к частоте колебаний расхода топлива, то изменение последнего, а следовательно, и тяги приводят к возбуждению продольных

колебаний корпуса и наоборот. Возникают автоколебания, приводящие к разрушению всей конструкции. Поэтому необходимо создавать математические модели, чтобы, начиная с этапа проектирования, попытаться конструктивно отстроить потенциально опасные частоты колебаний.

Проблема совершенствования существующих и разработки новых расчётных методик динамики тонкостенных топливных баков остаётся актуальной. Особенно остро проблема использования уточнённых расчётных методик проявляется в конструкциях авиационной и ракетной техники, где существуют жёсткие ограничения по массе, по уровню вибрации, а запасы прочности минимальны [26].

Задача о колебаниях жидкости в жёсткой цилиндрической полости рассматривалась М.В. Остроградским в 1826 году [27]. Первая работа, посвященная изучению движения твердого тела с полостями, полностью залитыми несжимаемой жидкостью, в общей постановке выполнена Н. Е. Жуковским в 1885 году [28]. Если жидкость имеет свободную поверхность, то задача динамического взаимодействия жидкости и полости усложняется даже в линейной постановке [26].

Задачи общего описания динамики объектов с жидкостью и основные постановки задач рассматривались в работах М. С. Галкина [29], Э. И. Григолюка [30], К. С. Колесникова [31, 32, 25], М. С. Натанзона [33], Б. И. Рабиновича [34], Г. Н. Микишева [35], Н. Н. Моисеева, В. В. Румянцева [36].

К первым публикациям, посвященным вопросам динамики упругого тела с полостями, частично заполненными жидкостью, можно отнести работы В. В. Болотина [37], В. Е. Бреславского [38], Н. Н. Моисеева [39, 40], Г. С. Нариманова [41], Б. И. Рабиновича [42], J. W. Miles [43]. Постановка проблемы взаимодействия оболочек с жидкостью рассматривалась в работах Л. И. Балабуха [44, 45], Э. И. Григолюка [30, 46], Н. N. Abramson [47], а также монографиях Г. Н. Микишева и Б. И. Рабиновича [48, 35, 34].

В разработку методов расчёта динамики тонкостенных упругих баков с жидкостью большой вклад внесли А. М. Анисимов [49], В. Н. Антонов [50], Э. С. Богадица [51], А. Д. Брусиловский [52], М. С. Галкин [29], В. А. Грибков [53, 54], М. А. Ильгамов [55], Р. Е. Лампер [56, 57], А. А. Пожалостин [58],

Г. И. Пшеничников [59], И. М. Рапопорт [60], В. П. Кандидов [61], В. В. Мокеев [62], В. Г. Григорьев [63, 64], Ф. Н. Шклярчук [65, 66].

Для определения динамических характеристик тонкостенных конструкций с жидкостью проводят экспериментальные исследования [67, 53, 68]. Для расчётов используется множество подходов: точные решения для частных случаев геометрии и граничных условий [69, 25], приближённые методы оценки на основе усеченного разложения решения по некоторому базису [53, 70, 71], интегральные подходы на основе минимизации функционалов энергий, в том числе варианты метода конечных элементов (МКЭ) [72–76], метода граничных элементов (МГЭ) [78, 26] и другие. Наиболее популярным и универсальным методом анализа является МКЭ, реализованный во множестве программных продуктов, постоянно используемый и развиваемый учеными в узких направлениях. В работах [79, 80] применяется метод дифференциальных квадратур для расчёта механики оболочек с жидкостью, в [81] используются сплайны Бикли. В работах [82, 74, 83, 84] рассматриваются другие подходы к расчёту взаимодействия оболочечных конструкций с жидкостью.

В работе В. Е. Левина [26] создана программа для расчёта колебаний осесимметричных оболочек, взаимодействующих с жидкостью, на основе метода конечных и граничных элементов. Из таких оболочек строится бак или связка баков, имеющих произвольную форму меридианов, подкреплённых шпангоутами, которые могут иметь дополнительные массы, имитирующие подвеску двигателя и других агрегатов.

1.3 Радиальные базисные функции

Радиальные базисные функции (РБФ) были впервые введены Харди и использованы для топографического картирования [85]. После применения РБФ для получения численных решений дифференциального уравнения в частных производных Канса [86], РБФ привлекли большое внимание исследователей, и с

тех пор они активно используются для решения многих задач науки и техники [87]. РБФ — это функция, в которой расстояние от центральной точки x_c до расчётного узла x является независимой переменной. В таблице 1.1 приведены типы радиальных базисных функций.

Таблица 1.1 — Радиальные базисные функции

| Тип базисной функции | Радиальная функция $\phi(r)$ |
|--|---|
| Polyharmonic Spline (PHS) — полигармонический сплайн | r^{2m-1} или $r^{2m} \log r; m \in \mathbb{N}$ |
| MQ (Multiquadric) — Мультикватричная | $\sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$ |
| IMQ (Inverse MQ) — Обратная мультикватричная | $1/\sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$ |
| IQ (Inverse quadratic) — Обратная квадратичная | $1/(1 + (\varepsilon r)^2)$ |
| GA (Gaussian) — Гауссовская | $e^{-(\varepsilon r)^2}$ |
| Bump function — Бамп-функция | $\begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1 - (\varepsilon r)^2}\right) & \text{при } r < \frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & \text{остальные} \end{cases}$ |

Традиционные методы, такие как метод конечных элементов (МКЭ), метод конечных объёмов (МКО) и метод конечных разностей (МКР) — это сеточные численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных (УрЧП). То есть в этих методах для решения УрЧП нужны заранее построенные сетки. Однако в бессеточных методах для решения УрЧП достаточно набора разрозненных узлов, представляющих область задачи. Благодаря прогрессу РБФ бессеточные методы успешно используются для численного решения УрЧП. Первый метод, на основе РБФ, был разработан Кансой в 1990 году [86, 88]. В литературе существует множество исследований, использующих подход Канса или

аналогичные подходы. Например, в [89] эллиптические краевые задачи решаются с помощью методов коллокации РБФ, в [90] для решения нелинейных краевых задач используется улучшенный РБФ метода Канса.

Дискретное по времени диффузионно-волновое уравнение решается с помощью РБФ в [91]. Численное решение нелинейного дробного интегродифференциального уравнения реакции-диффузии с использованием РБФ получено в [92]. Двумерное уравнение Шредингера численно анализируется с помощью РБФ и метода коллокации в [93]. Некоторые хорошо известные УрЧП рассматриваются в [94, 95], используя геометрический подход для интегрирования по времени и РБФ для дискретизации по пространству. Дробное по времени нелинейное уравнение Шредингера рассматривается в [96]. Дехган и его коллеги использовали методы на основе РБФ для решения уравнения Фоккера – Планка [97] и уравнения Бенджамина – Бона – Махони – Бургерса [98]. Анализ кривизны роговицы с помощью РБФ методов представлен в [99]. Некоторые адаптивные методы, основанные на РБФ-коллокации для решения эллиптических УрЧП, предложены Каворетто и Де Росси [100, 101]. Однако в подходе Канса РБФ используются глобально. То есть для аппроксимации функции или её производной в определённой точке используются все точки данных в расчётной области. Такой подход приводит к генерации плотных и плохо обусловленных интерполяционных матриц, что повышает вычислительные затраты или может привести к численной неустойчивости. Для облегчения этой ситуации исследователями разработаны локальные бессеточные методы на основе РБФ или конечно-разностные РБФ методы (РБФ-КР) [102, 103]. В методах РБФ-КР неизвестные функции или их производные аппроксимируются в заданной точке x_c линейной комбинацией значений функции в некоторых соседних узлах, а не во всех узлах внутри расчётной области. Такой подход позволяет получить хорошо обусловленные разреженные матрицы, что очень важно с точки зрения вычислительных затрат. Локальные бессеточные методы РБФ или методы РБФ-КР эффективно используются для решения многих задач. Например, Сарра [103] использовал локальный РБФ-подход для решения уравнений адвекции-диффузии-реакции. В работе [104] разработан

локальный бессеточный метод для устойчивых и нестационарных уравнений в частных производных с преобладанием конвекции. Локальный метод РБФ-коллокации используется для решения дискретного уравнения диффузии с переменным порядком времени в двумерной нерегулярной области [105]. Решение высокоразмерных нелинейных уравнений Шредингера с помощью метода РБФ-КР описано в [106]. Метод РБФ-КР использован для решения нелинейного обобщённого уравнения Кортевега – де Фриза – Бюргерса (Generalized Korteweg-de Vries-Burgers) в [107], задачи с преобладанием конвекции численно исследованы с помощью локального метода РБФ [108]. Дехган и Аббасзаде [109] предложили метод РБФ-КР для моделирования уравнений мелкой воды. Недавно в [110] был разработан метод РБФ-КР для решения уравнений Стокса – Дарси. Локальный бессеточный метод применён для двумерного уравнения вязкоупругих волн в [111] и гибридный локальный бессеточный метод применен для решения двумерного дробного уравнения кабеля в [112].

Радиальные базисные функции можно разделить на две группы: глобальные и локальные. РБФ-КР – локальные радиальные базисные функции. В данный момент РБФ всё больше и больше используются для крупномасштабных приложений. Глобальные РБФ обычно заменяются локальными РБФ, этого следовало ожидать по нескольким причинам: 1) глобальные РБФ приводят к полным матрицам, работа с которыми весьма ресурсоёмка при решении задач с высокой степенью дискретизации расчётной области, в то время как РБФ-КР приводит к разреженным матрицам, следовательно, он вычислительно «дешев»; 2) интерполяция и производные являются локальными свойствами функции, поэтому локальные приближения естественны в данном контексте; 3) многоядерные вычисления с распределённой памятью значительно выигрывают от пространственной локальности, обеспечиваемой аппроксимацией РБФ-КР.

Выводы по главе 1

Наиболее распространённым методом исследования механики деформирования оболочек вращения является метод конечных элементов, сформулированный в перемещениях. В этом случае разрешающими функциями являются степени свободы перемещений (и поворотов в случае пластин и оболочек). Конструкция разбивается на элементарные объёмы, функции формы обеспечивают связь перемещений с деформациями, которые, в свою очередь, связаны физическими соотношениями с напряжениями, последние должны удовлетворять уравнениям равновесия. Формируется функционал полной энергии, либо выражение принципа возможных перемещений, что в конечном итоге приводит к интегрированию по каждому элементу и формированию матриц жёсткости и масс, а разрешающая система уравнений для узловых перемещений является, по сути, балансом внешних сил, сил упругости и инерции, приведённых в каждый узел сетки.

Применение метода конечных разностей подразумевает решение дифференциальных уравнений и выполнение граничных условий напрямую для разрешающих функций перемещений и напряжений. Все уравнения выполняются в каждом узле отдельно для перемещений и напряжений, что может иметь некоторые преимущества перед МКЭ, сформулированным в перемещениях [6]. Исследование преимуществ и недостатков подходов выходит за рамки данной диссертационной работы.

Радиальные базисные функции [113–119] используются для построения интерполирующих многочленов, которые, в свою очередь, применяются для решения краевых задач для дифференциальных уравнений в разных областях математической физики. Можно выделить два основных направления использования РБФ:

1. Бессеточные методы: линейные комбинации РБФ используются для аппроксимации разрешающих функций задачи. Неизвестными параметрами

являются коэффициенты разложения разрешающих функций в ряды по РБФ. Первые определяются из решения СЛАУ, полученной после подстановки в дифференциальные уравнения и краевые/граничные условия соответствующих многочленов на основе РБФ.

2. Метод конечных разностей: интерполяция по РБФ используется для вычисления локальных весовых коэффициентов для разностных трафаретов, аппроксимирующих дифференциальный оператор и краевые/граничные условия по соседним узловым точкам. При этом неизвестными, подлежащими определению, являются узловые значения разрешающих функций, как в традиционном МКР. Такая разновидность МКР имеет название в англоязычной литературе Radial Basis Function Finite Difference method (RBF-FD).

В данной диссертационной разрабатывается альтернативный МКЭ и МГЭ подходам к расчёту тонкостенных оболочечных конструкций, взаимодействующих с жидкостью. В основе предлагаемой методики лежит прямое решение дифференциальных уравнений с помощью метода конечных разностей, в котором весовые коэффициенты разложения производных на произвольном трафарете узлов вычисляются с помощью сплайн-интерполяции на основе радиальных базисных функций.

ГЛАВА 2 СТАТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

2.1 Общие уравнения оболочек в глобальных координатах

В трёхмерном пространстве рассмотрим криволинейную поверхность оболочки, которая разделяется координатными линиями (рисунок 2.1а), на поверхности возьмём бесконечно малый элемент, образуемый линиями s_1 , s_2 , $s_1 + ds_1$, $s_2 + ds_2$, в точке O этого элемента поставим локальную систему координат с тремя единичными векторами \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 (рисунок 2.1б).

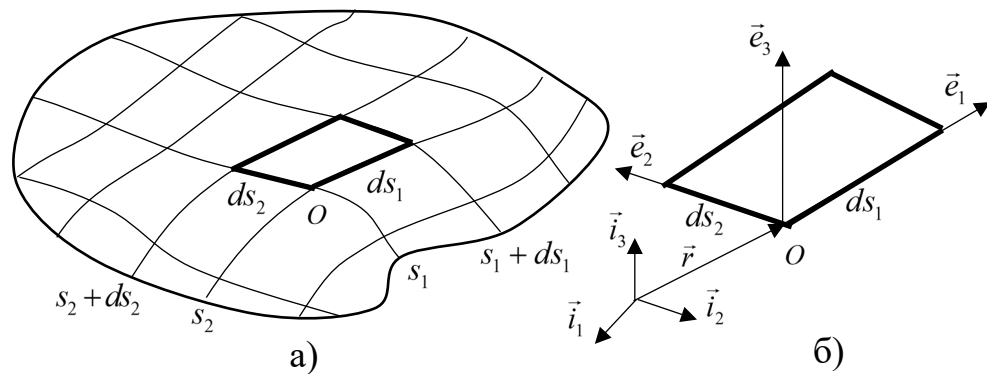


Рисунок 2.1 — Координатные линии. Элемент срединной поверхности оболочки

Уравнение поверхности задаётся радиус-вектором:

$$\vec{r}(s_1, s_2) = x_1(s_1, s_2)\vec{i}_1 + x_2(s_1, s_2)\vec{i}_2 + x_3(s_1, s_2)\vec{i}_3 = x_k(s_1, s_2)\vec{i}_k, \quad (2.1)$$

где \vec{i}_k — базисные векторы глобальной системы координат; s_1, s_2 — криволинейные координаты рассматриваемой поверхности; по повторяющимся индексам ведётся суммирование от 1 до 3.

Векторы локальной системы координат выражаются следующим образом:

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s_1}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s_2}, \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2. \quad (2.2)$$

С практической стороны удобно задавать начальную ориентацию с помощью матрицы поворота (матрицы начальной геометрии):

$$\begin{cases} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \begin{cases} \vec{i}_1 \\ \vec{i}_2 \\ \vec{i}_3 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{e}_i = \beta_{ik} \vec{i}_k. \quad (2.3)$$

Деформация малого элемента (рисунок 2.2) состоит из:

- перемещения параллельно самому себе как жёсткого целого и поворота относительно точки O^* ,
- изменения длин его сторон,
- изменения угла между сторонами.

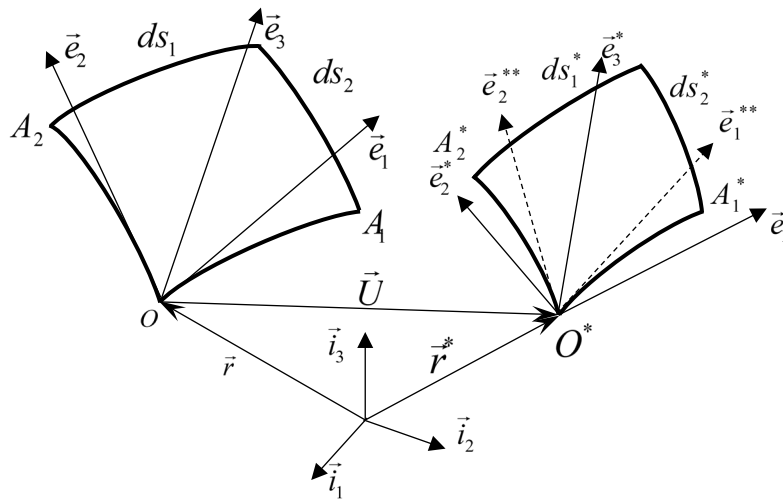


Рисунок 2.2 — Перемещение и деформирование малого элемента оболочки

Поворот малого элемента определим следующим образом:

$$\begin{cases} \vec{i}_1^* \\ \vec{i}_2^* \\ \vec{i}_3^* \end{cases} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{cases} \vec{i}_1 \\ \vec{i}_2 \\ \vec{i}_3 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{i}_n^* = \lambda_{nk} \vec{i}_k, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ii} &= 1 - \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} (\omega_j^2 + \omega_k^2), \lambda_{ij} = \frac{\sin \omega}{\omega} \omega_k + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \omega_i \omega_j, \\ \lambda_{ik} &= -\frac{\sin \omega}{\omega} \omega_k + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \omega_i \omega_j, i = 1, 2, 3; j = 2, 3, 1; k = 3, 1, 2; \end{aligned} \quad (2.5)$$

где ω_k — проекции вектора конечного поворота (вектора Эйлера) на оси глобальной системы координат.

В результате перемещения параллельно самому себе как жёсткого целого точка O займет новое положение O^* , длины отрезков $ds_1 = |OA_1|$, $ds_2 = |OA_2|$

изменяются и станут равными $|O^* A_1^*| = ds_1^*$, $|O^* A_2^*| = ds_2^*$. Обозначим $\varepsilon_1 = \frac{ds_1^* - ds_1}{ds_1}$,

$\varepsilon_2 = \frac{ds_2^* - ds_2}{ds_2}$ — относительные удлинения сторон малого элемента вдоль

направлений s_1 и s_2 соответственно.

При деформировании векторы локального базиса \vec{e}_1, \vec{e}_2 переходят в \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^* . С учётом (2.3) и (2.4) повернутые орты будут иметь следующие выражения:

$$\vec{e}_i^* = \beta_{ik} \vec{i}_k^* = \beta_{ik} \lambda_{kn} \vec{i}_n. \quad (2.6)$$

При наличии сдвига в плоскости, ортогональность \vec{e}_1^* и \vec{e}_2^* нарушается, и они переходят в $\vec{e}_1^{**}, \vec{e}_2^{**}$. Обозначим угол сдвига χ , тогда:

$$\vec{e}_1^{**} = \vec{e}_1^* \cos \chi + \vec{e}_2^* \sin \chi, \quad \vec{e}_2^{**} = \vec{e}_1^* \sin \chi + \vec{e}_2^* \cos \chi,$$

или

$$\vec{e}_k^{**} = \alpha_{kj} \vec{e}_j^*, \quad \text{где } \alpha = \begin{pmatrix} \cos \chi & \sin \chi \\ \sin \chi & \cos \chi \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Из (2.2) и (2.3) можно получить:

$$d\vec{r} = \vec{e}_1 ds_1 = \beta_{1k} \vec{i}_k ds_1, \quad d\vec{r} = \vec{e}_2 ds_2 = \beta_{2k} \vec{i}_k ds_2, \quad (2.8)$$

тогда с учётом (2.6) и (2.7)

$$\begin{aligned} d\vec{r}^* &= \vec{e}_1^* ds_1^* = (1 + \varepsilon_1) \alpha_{1j} \beta_{jk} \lambda_{kn} \vec{i}_n ds_1, \\ d\vec{r}^* &= \vec{e}_2^* ds_2^* = (1 + \varepsilon_2) \alpha_{2j} \beta_{jk} \lambda_{kn} \vec{i}_n ds_2, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Поскольку $\vec{U} = \vec{r}^* - \vec{r}$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{U}}{\partial s_1} &= \left[(1 + \varepsilon_1) \alpha_{1j} \beta_{jk} \lambda_{kn} - \beta_{1n} \right] \vec{i}_n, \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial s_2} &= \left[(1 + \varepsilon_2) \alpha_{2j} \beta_{jk} \lambda_{kn} - \beta_{2n} \right] \vec{i}_n. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Уравнения (2.10) описывают кинематику деформирования срединной поверхности оболочки. Они связывают поворот элемента оболочки, растяжение его сторон и изменение угла между ними с перемещениями элемента.

Несмотря на то, что в основе рассматриваемой математической модели лежит гипотеза Кирхгофа – Лява, подразумевающая малую толщину оболочки и сохранение ортогональности нормалей к срединной поверхности при деформировании, кинематические соотношения (2.10) можно модифицировать для приближённого учёта сдвиговых деформаций, которые вносят ощутимый вклад в изменение кривизны при деформировании толстых оболочек. Для этого будем рассматривать конечное состояние как суперпозицию деформированных состояний: 1) от изгиба, растяжения, сдвига в плоскости (по гипотезе Кирхгофа – Лява) и 2) сдвига поперёк срединной поверхности, что соответствует теории Тимошенко. Таким образом, перемещение за счет сдвиговой деформации вдоль нормали к деформированной поверхности можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} d\vec{r}_1^S &= \vec{S}_1 ds_1^* = \frac{Q_1}{\kappa Gh^*} \vec{e}_3^* ds_1^* = \frac{\vec{T}_1 \vec{e}_3^*}{\kappa Gh^*} \vec{e}_3^* ds_1^* = \frac{T_{1j} \vec{i}_j \beta_{3k} \lambda_{kr} \vec{i}_r}{\kappa Gh^*} \beta_{3p} \lambda_{pn} \vec{i}_n ds_1^* \\ &= \frac{T_{1j} \beta_{3k} \lambda_{kj}}{\kappa Gh^*} \beta_{3p} \lambda_{pn} \vec{i}_n ds_1^* = \frac{T_{1j}}{\kappa Gh^*} \lambda_{kj} \beta_{3k} \beta_{3p} \lambda_{pn} \vec{i}_n ds_1^* = S_{1n} \vec{i}_n ds_1^*, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где G — модуль сдвига, h^* — толщина деформированной оболочки, κ — корректирующий коэффициент сдвига прямоугольного сечения, $\vec{T}_1 = T_{1j} \vec{i}_j$, $\vec{T}_2 = T_{2j} \vec{i}_j$ — векторы внутренних погонных сил на площадках, ортогональных координатным линиям. Аналогично в другом направлении перемещение за счет сдвига будет иметь следующее выражение:

$$d\vec{r}_2^S = \vec{S}_2 ds_2^* = \frac{T_{2j}}{\kappa Gh^*} \lambda_{kj} \beta_{3k} \beta_{3p} \lambda_{pn} \vec{i}_n ds_2^* = S_{2n} \vec{i}_n ds_2^*. \quad (2.12)$$

Корректирующий коэффициент сдвига [120, 121, 71] учитывает неравномерность распределения касательных напряжений по толщине оболочки. В середине прошлого столетия этот коэффициент Миндлин [122] предложил значение $\kappa = \pi^2 / 12$, что мало отличается от значения, полученного Рейснером:

$\kappa = 5/6$ [123]. Каупер вычислил коэффициент коррекции как $\kappa = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}$ [124].

Жилиным было получено значение $\kappa = \frac{5}{6-\nu}$ [123], и сделано предположение, что

реальный корректирующий коэффициент сдвига $\pi^2 / 12 \leq \kappa < 1$. Сравнение теоретических значений корректирующих коэффициентов сдвига с экспериментальными приведены в работе [125].

В итоге кинематические соотношения (2.10) с учётом поперечного сдвига (2.11) и (2.12) запишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}}{\partial s_1} &= \left[(1 + \varepsilon_1) (\alpha_{1j} \beta_{jk} \lambda_{kn} + S_{1n}) - \beta_{1n} \right] \bar{i}_n, \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial s_2} &= \left[(1 + \varepsilon_2) (\alpha_{2j} \beta_{jk} \lambda_{kn} + S_{2n}) - \beta_{2n} \right] \bar{i}_n, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\text{где } S_{1n} = \frac{T_{1j}}{\kappa G h^*} \lambda_{kj} \beta_{3k} \beta_{3p} \lambda_{pn}, \quad S_{2n} = \frac{T_{2j}}{\kappa G h^*} \lambda_{kj} \beta_{3k} \beta_{3p} \lambda_{pn}.$$

Вычислим кривизны оболочки в двух плоскостях для недеформированного и деформированного состояний:

$$k_1 = \frac{\partial \bar{e}_3}{\partial s_1} \bar{e}_1, \quad k_1^* = \frac{\partial \bar{e}_3^*}{\partial s_1^*} \bar{e}_1^{**}, \quad k_2 = \frac{\partial \bar{e}_3}{\partial s_2} \bar{e}_2, \quad k_2^* = \frac{\partial \bar{e}_3^*}{\partial s_2^*} \bar{e}_2^{**}. \quad (2.14)$$

Рассмотрим равновесие элемента оболочки под действием внешней распределённой нагрузки и моментов. По граням элемента прикладываются внутренние погонные усилия и моменты, полученные в результате осреднений напряжений по толщине оболочки (рисунок 2.3).

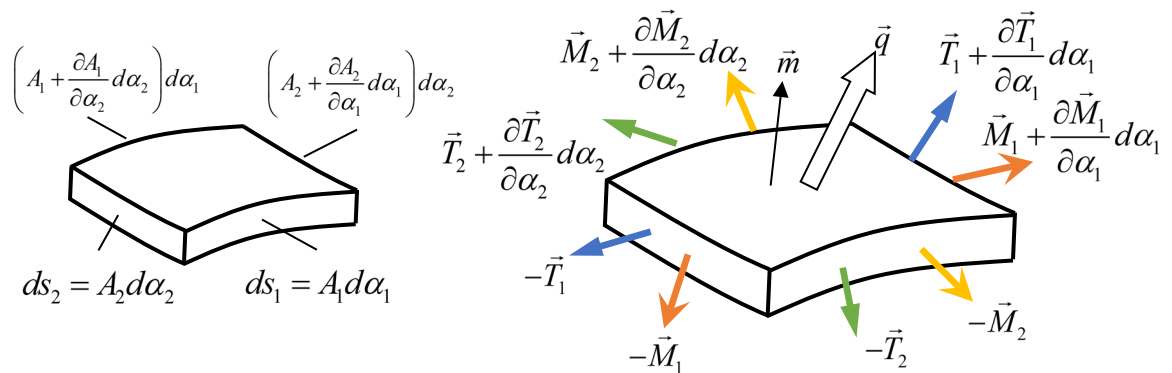


Рисунок 2.3 — Равновесие элемента оболочки

Направление погонной силы относительно нормали к грани, в которой она действует, может быть в общем случае произвольным (возможны нормальные,

поперечные и касательные усилия). Дифференциалы параметров поверхности представим в виде $ds_1 = A_1 d\alpha_1$, $ds_2 = A_2 d\alpha_2$. В этом представлении можно считать α_1 , α_2 безразмерными параметрами на поверхности.

Для деформированной оболочки имеем $ds_1^* = A_1^* d\alpha_1$, $ds_2^* = A_2^* d\alpha_2$. Уравнения равновесия сил и моментов, записанные для деформированного состояния, имеют вид:

$$\frac{1}{A_1^* A_2^*} \frac{\partial (A_2^* \vec{T}_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1^* A_2^*} \frac{\partial (A_1^* \vec{T}_2)}{\partial \alpha_2} + \vec{q} = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{A_1^* A_2^*} \frac{\partial (A_2^* \vec{M}_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1^* A_2^*} \frac{\partial (A_1^* \vec{M}_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1^*} \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \alpha_1} \times \vec{T}_1 + \frac{1}{A_2^*} \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \alpha_2} \times \vec{T}_2 + \vec{m} = 0, \quad (2.16)$$

где $\vec{T}_1 = T_{1j} \vec{i}_j$, $\vec{T}_2 = T_{2j} \vec{i}_j$ — векторы внутренних погонных сил; $\vec{M}_1 = M_{1j} \vec{i}_j$, $\vec{M}_2 = M_{2j} \vec{i}_j$ — векторы внутренних моментов; $\vec{q} = q_j \vec{i}_j$ — вектор внешней распределённой нагрузки; $\vec{m} = m_j \vec{i}_j$ — вектор внешнего распределённого момента.

Для замыкания системы уравнений необходимо добавить связь между параметрами деформации и напряжениями и граничные условия. Запишем физические соотношения, полученные В.В. Новожиловым [126] для изотропного материала:

$$\text{растяжение: } \varepsilon_1 = \frac{1}{Eh} (N_1 - \nu N_2), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{Eh} (N_2 - \nu N_1), \quad (2.17)$$

$$\text{сдвиг: } \chi = \frac{2(1+\nu)}{Eh} S = \frac{2(1+\nu)}{Eh} \left(N_{12} - \frac{H}{R_2} \right) = \frac{2(1+\nu)}{Eh} \left(N_{21} - \frac{H}{R_1} \right), \quad (2.18)$$

$$\text{изгиб: } \kappa_1 = \frac{12}{Eh^3} (M_1 - \nu M_2), \quad \kappa_2 = \frac{12}{Eh^3} (M_2 - \nu M_1), \quad (2.19)$$

$$\text{кручение: } \tau = \frac{12(1+\nu)}{Eh^3} H, \quad (2.20)$$

где $N_1 = \vec{T}_1 \vec{e}_1^*$, $N_2 = \vec{T}_2 \vec{e}_2^*$ — продольные силы, $S = \vec{T}_1 \vec{e}_2^* = \vec{T}_2 \vec{e}_1^*$ — сдвиговое усилие, $M_1 = \vec{M}_1 \vec{e}_2^*$, $M_2 = \vec{M}_2 \vec{e}_1^*$ — изгибающие моменты, $H = \vec{M}_1 \vec{e}_1^* = \vec{M}_2 \vec{e}_2^*$ — крутящий момент, h — толщина оболочки, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона,

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — параметры продольной деформации, χ — параметр деформации сдвига, κ_1, κ_2 — параметры изменения кривизны срединной поверхности, τ — параметр деформации кручения.

Необходимо отметить, что закон зависимости деформаций от напряжений (2.17)–(2.20) может быть заменен на любой другой при необходимости, это не приведет к принципиальному изменению предлагаемого подхода к расчёту деформирования оболочек. Кроме того, в уравнения могут быть добавлены силы инерции и рассмотрена задача динамического деформирования, что будет сделано в следующей главе.

2.2 Вывод определяющих уравнений для осесимметричной оболочки

При осесимметричном деформировании оболочки вращения (рисунок 2.4) координатная сетка на оболочке остаётся ортогональной, то есть параметр сдвига $\chi = 0$. Введем в рассмотрение цилиндрическую систему координат с ортами

$$\vec{i}_r = \cos \varphi \vec{i}_1 + \sin \varphi \vec{i}_2, \vec{i}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i}_1 + \cos \varphi \vec{i}_2, \vec{i}_z = \vec{i}_3. \quad (2.21)$$

Радиус-вектор срединной поверхности будет иметь следующий вид:

$$\vec{r}(s, \varphi) = r(s) \vec{i}_r + z(s) \vec{i}_z, \quad (2.22)$$

где $r(s), z(s)$ — параметрические уравнения меридиана оболочки.

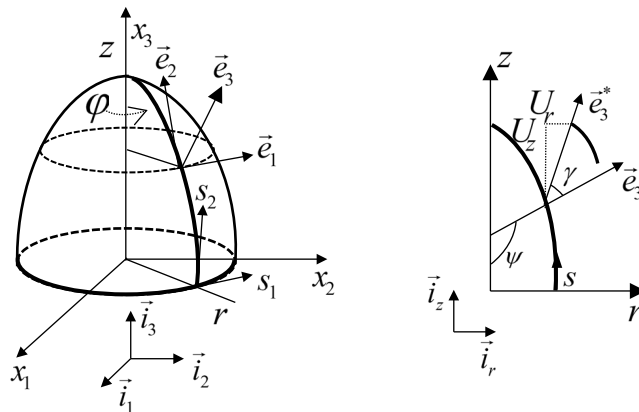


Рисунок 2.4 — Геометрия и деформирование оболочки вращения

В качестве параметров поверхности возьмём $s_1 = r\varphi$, $s_2 = s$. Выпишем векторы локального базиса:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= -\sin\varphi\vec{i}_1 + \cos\varphi\vec{i}_2 = \vec{i}_\varphi, \\ \vec{e}_2 &= r_{,s}\cos\varphi\vec{i}_1 + r_{,s}\sin\varphi\vec{i}_2 + z_{,s}\vec{i}_3 = r_{,s}\vec{i}_r + z_{,s}\vec{i}_z, \\ \vec{e}_3 &= z_{,s}\cos\varphi\vec{i}_1 + z_{,s}\sin\varphi\vec{i}_2 - r_{,s}\vec{i}_3 = z_{,s}\vec{i}_r - r_{,s}\vec{i}_z,\end{aligned}\quad (2.23)$$

где символ в нижнем индексе после запятой означает дифференцирование по этой переменной.

Таким образом, матрица (2.3) для осесимметричной оболочки будет иметь вид:

$$\beta = \begin{bmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ r_{,s}\cos\varphi & r_{,s}\sin\varphi & z_{,s} \\ z_{,s}\cos\varphi & z_{,s}\sin\varphi & -r_{,s} \end{bmatrix}.\quad (2.24)$$

Выпишем кривизны недеформированной срединной поверхности:

$$k_1 = \frac{\partial\vec{e}_3}{\partial s_1}\vec{e}_1 = \frac{1}{r}(-z_{,s}\sin\varphi\vec{i}_1 + z_{,s}\cos\varphi\vec{i}_2)(-\sin\varphi\vec{i}_1 + \cos\varphi\vec{i}_2) = \frac{z_{,s}}{r},\quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}k_2 &= \frac{\partial\vec{e}_3}{\partial s_2}\vec{e}_2 = (z_{,ss}\cos\varphi\vec{i}_1 + z_{,ss}\sin\varphi\vec{i}_2 - r_{,ss}\vec{i}_3)(r_{,s}\cos\varphi\vec{i}_1 + r_{,s}\sin\varphi\vec{i}_2 + z_{,s}\vec{i}_3) = \\ &= z_{,ss}r_{,s} - r_{,ss}z_{,s}.\end{aligned}\quad (2.26)$$

Вектор поворота (2.5) в случае осесимметричного деформирования имеет следующий вид:

$$\vec{\omega} = -\gamma\vec{e}_1 = -\gamma\beta_{1k}\vec{i}_k = \gamma\sin\varphi\vec{i}_1 - \gamma\cos\varphi\vec{i}_2,\quad (2.27)$$

Таким образом: $\omega_1 = \gamma\sin\varphi$, $\omega_2 = -\gamma\cos\varphi$, $\omega_3 = 0$, $|\vec{\omega}| = \gamma$. Элементы матрицы поворота для преобразования (2.4) примут вид:

$$\begin{aligned}\lambda_{11} &= 1 - (1 - \cos\gamma)\cos^2\varphi, \quad \lambda_{22} = 1 - (1 - \cos\gamma)\sin^2\varphi, \quad \lambda_{33} = \cos\gamma, \\ \lambda_{12} &= -(1 - \cos\gamma)\sin\varphi\cos\varphi, \quad \lambda_{23} = \sin\gamma\sin\varphi, \quad \lambda_{31} = -\sin\gamma\cos\varphi, \\ \lambda_{13} &= \sin\gamma\cos\varphi, \quad \lambda_{21} = -(1 - \cos\gamma)\sin\varphi\cos\varphi, \quad \lambda_{32} = -\sin\gamma\sin\varphi.\end{aligned}\quad (2.28)$$

Векторы погонных внутренних усилий и моментов в силу осевой симметрии деформирования имеют вид:

$$\vec{T}_1 = T_{1\varphi}\vec{i}_\varphi, \quad \vec{T}_2 = T_{2r}\vec{i}_r + T_{2z}\vec{i}_z, \quad \vec{M}_1 = M_{1s}\vec{e}_2 = M_{1s}r_{,s}\vec{i}_r + M_{1s}z_{,s}\vec{i}_z, \quad \vec{M}_2 = M_{2\varphi}\vec{i}_\varphi.\quad (2.29)$$

Кривизны координатных линий на деформированной поверхности с учётом (2.6), (2.24) и (2.28) запишутся следующим образом:

$$k_1^* = \frac{\partial \vec{e}_3^*}{\partial s_1^*} \vec{e}_1^* = \frac{1}{r(1 + \varepsilon_1)} \frac{\partial \vec{e}_3^*}{\partial \varphi} \vec{e}_1^* = \frac{1}{r(1 + \varepsilon_1)} (z_{,s} \cos \gamma + r_{,s} \sin \gamma), \quad (2.30)$$

$$k_2^* = \frac{\partial \vec{e}_3^*}{\partial s_2^*} \vec{e}_2^* = \frac{1}{(1 + \varepsilon_2)} \frac{\partial \vec{e}_3^*}{\partial s} \vec{e}_2^* = \frac{1}{(1 + \varepsilon_2)} (z_{,ss} r_{,s} - r_{,ss} z_{,s} + \gamma_{,s}). \quad (2.31)$$

Вычислим изменение кривизн при деформировании:

$$\Delta k_1 = k_1^* - k_1 = \frac{1}{r(1 + \varepsilon_1)} (z_{,s} \cos \gamma + r_{,s} \sin \gamma) - \frac{z_{,s}}{r}, \quad (2.32)$$

$$\Delta k_2 = k_2^* - k_2 = \frac{1}{(1 + \varepsilon_2)} (z_{,ss} r_{,s} - r_{,ss} z_{,s} + \gamma_{,s}) - (z_{,ss} r_{,s} - r_{,ss} z_{,s}). \quad (2.33)$$

Необходимо отметить, что в выражения для изменения кривизн (2.32) и (2.33) входят начальные кривизны. Начальная кривизна меридиана $k_2 = z_{,ss} r_{,s} - r_{,ss} z_{,s}$ содержит вторые производные функций $r(s)$ и $z(s)$, что может усложнить формирование исходных данных при наличии скачков кривизн. Обычно, в таких случаях производят стыковку отдельных решений, на каждом участке, где кривизна непрерывна и нет изломов. Программная реализация метода конечных разностей, применяемая в данной работе для решения краевой задачи, позволяет проводить стыковку решений в автоматическом режиме без участия расчётчика.

При малых продольных деформациях (удлинении) выражения для приращения кривизн примут следующий вид

$$\Delta k_1 = \frac{1}{r} [z_{,s} (\cos \gamma - 1) + r_{,s} \sin \gamma], \quad \Delta k_2 = \gamma_{,s}, \quad (2.34)$$

то есть, если деформации предполагаются малыми по смыслу задачи, то задание начальной кривизны не обязательно.

Вектор перемещений в случае осесимметричного деформирования выглядят следующим образом:

$$\vec{U} = U_r \vec{i}_r + U_z \vec{i}_z = U_r \cos \varphi \vec{i}_1 + U_r \sin \varphi \vec{i}_2 + U_z \vec{i}_3. \quad (2.35)$$

Преобразуем выражения для производных перемещений:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial s_1} = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} U_r \vec{i}_\varphi = \varepsilon_1 \vec{i}_\varphi,$$

отсюда следует выражение для окружной деформации (удлинения):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{r} U_r. \quad (2.36)$$

Из соотношения (2.13) с учётом (2.28) и (2.12) получим:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial s_2} = \frac{d\vec{U}}{ds} = \left[(1 + \varepsilon_2)(d_r + d_z \theta) - r_{,s} \right] \vec{i}_r + \left[(1 + \varepsilon_2)(d_z - d_r \theta) - z_{,s} \right] \vec{i}_z, \quad (2.37)$$

где

$$\theta = \frac{d_z T_{2r} - d_r T_{2z}}{\kappa G h^*}, \quad d_r = (r_{,s} \cos \gamma - z_{,s} \sin \gamma), \quad d_z = (r_{,s} \sin \gamma + z_{,s} \cos \gamma). \quad (2.38)$$

Таким образом, получены выражения для изменения кривизн (2.32) и (2.33), выражение для удлинения в окружном направлении (2.36), дифференциальные уравнения для перемещений (2.37). Получим уравнения равновесия и физические соотношения с учётом изменения объёма при больших перемещениях.

До сих пор (выше) использовалась естественная параметризация функций — s_1, s_2, s , за исключением уравнений равновесия (2.15) и (2.16), где введены безразмерные параметры на поверхности — α_1, α_2 и параметры Ламе A_1, A_2 . На практике удобно пользоваться произвольной безразмерной параметризацией. Для случая осесимметричной оболочки введем безразмерный параметр длины меридиана ξ , то есть $s = s(\xi)$. Определим параметры Ламе следующими соотношениями:

$$ds_1 = A_1 d\alpha_1 = r d\varphi, \quad ds_2 = A_2 d\alpha_2 = \frac{ds}{d\xi} d\xi, \quad (2.39)$$

то есть параметры Ламе $A_1 = r, A_2 = s_{,\xi}$, и $d\alpha_1 = d\varphi, d\alpha_2 = d\xi$.

Вычислим производные, входящие в уравнения равновесия (2.15), (2.16), по безразмерным параметрам поверхности:

$$\frac{\partial \left[A_2 (1 + \varepsilon_2) \vec{T}_1 \right]}{\partial \alpha_1} = \frac{d \left[A_2 (1 + \varepsilon_2) T_{1\varphi} \vec{i}_\varphi \right]}{d\varphi} = A_2 (1 + \varepsilon_2) \frac{dT_{1\varphi} \vec{i}_\varphi}{d\varphi} = -A_2 (1 + \varepsilon_2) T_{1\varphi} \vec{i}_r, \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial [A_1(1+\varepsilon_1)\vec{T}_2]}{\partial \alpha_2} = \frac{d[r(1+\varepsilon_1)\vec{T}_2]}{d\xi} = \frac{d[r(1+\varepsilon_1)T_{2r}]}{d\xi} \vec{i}_r + \frac{d[r(1+\varepsilon_1)T_{2z}]}{d\xi} \vec{i}_z, \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial [A_2(1+\varepsilon_2)\vec{M}_1]}{\partial \alpha_1} = A_2(1+\varepsilon_2) \frac{d(M_{1s}r_{,s}\vec{i}_r + M_{1z}z_{,s}\vec{i}_z)}{d\varphi} = A_2(1+\varepsilon_2)M_{1s}r_{,s}\vec{i}_\varphi, \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial [A_1(1+\varepsilon_1)\vec{M}_2]}{\partial \alpha_2} = \frac{d[r(1+\varepsilon_1)M_{2\varphi}\vec{i}_\varphi]}{d\xi} = \frac{d[r(1+\varepsilon_1)M_{2\varphi}]}{d\xi} \vec{i}_\varphi. \quad (2.43)$$

Таким образом, уравнения равновесия сил в проекциях на оси цилиндрической системы координат \vec{i}_r, \vec{i}_z имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d[r(1+\varepsilon_1)T_{2r}]}{d\xi} - A_2(1+\varepsilon_2)T_{1\varphi} + rA_2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)q_r &= 0, \\ \frac{d[r(1+\varepsilon_1)T_{2z}]}{d\xi} + rA_2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)q_z &= 0, \end{aligned} \quad (2.44)$$

где $\vec{q} = q_r\vec{i}_r + q_z\vec{i}_z$ — внешняя нагрузка. Уравнение равновесия в проекции на ось \vec{i}_φ удовлетворяется тождественно.

Уравнение равновесия моментов в проекции на ось \vec{i}_φ :

$$\begin{aligned} \frac{d[r(1+\varepsilon_1)M_{2\varphi}]}{d\xi} + A_2(1+\varepsilon_2)M_{1s}r_{,s} + \\ + rA_2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)[T_{2r}(r_{,s}\sin\gamma + z_{,s}\cos\gamma) - T_{2z}(r_{,s}\cos\gamma - z_{,s}\sin\gamma)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Физические соотношения (2.17)–(2.20) для осесимметричной оболочки примут следующий вид:

$$N_1 = T_{1\varphi} = \frac{Eh^*}{1-\nu^2}(\hat{\varepsilon}_1 + \nu\hat{\varepsilon}_2), \quad (2.46)$$

$$N_2 = T_{2r}(r_{,s}\cos\gamma - z_{,s}\sin\gamma) + T_{2z}(r_{,s}\sin\gamma + z_{,s}\cos\gamma) = \frac{Eh^*}{1-\nu^2}(\hat{\varepsilon}_2 + \nu\hat{\varepsilon}_1), \quad (2.47)$$

$$M_1 = M_{1s} = \frac{Eh^{*3}}{12(1-\nu^2)}(\Delta k_1 + \nu\Delta k_2), \quad (2.48)$$

$$M_2 = -M_{2\varphi} = \frac{Eh^{*3}}{12(1-\nu^2)}(\Delta k_2 + \nu\Delta k_1), \quad (2.49)$$

где h^* — толщина деформированной оболочки (при коэффициенте Пуассона $\nu > 0$ при растяжении происходит утонение, а при сжатии – утолщение); $\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2$ — меры продольных деформаций.

В настоящее время тензор логарифмической деформации является одной из наиболее популярных мер деформации тела при решении геометрически нелинейных задач [127], логарифмические деформации выражаются через удлинения следующим образом:

$$\hat{\varepsilon}_1 = \ln(1 + \varepsilon_1), \quad \hat{\varepsilon}_2 = \ln(1 + \varepsilon_2). \quad (2.50)$$

Необходимо отметить, что при малых деформациях или при геометрически линейной постановке задачи удлинения и меры деформации равны: $\hat{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1, \hat{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2$. Это следует, в том числе, из формул (2.50).

Определим изменение толщины при деформировании через изменение объёма. До деформации элементарный объём равен

$$V = \rho h ds_1 ds_2, \quad (2.51)$$

после деформирования объём можно выразить так:

$$V^* = \rho h^* ds_1^* ds_2^* = \rho h f_h (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) ds_1 ds_2, \quad (2.52)$$

где новую толщину представим в виде произведения старой толщины и некоторой функции, описывающей изменение толщины, подлежащей определению: $h^* = h f_h$. Имеет место следующее отношение:

$$\frac{V^*}{V} = \frac{\rho h f_h (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) ds_1 ds_2}{\rho h ds_1 ds_2} = f_h (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2), \quad (2.53)$$

с другой стороны, известно [128, 129, 130]:

$$\frac{V^*}{V} = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3), \quad (2.54)$$

следовательно, $f_h = 1 + \varepsilon_3$.

Запишем обобщённый закон Гука:

$$\hat{\varepsilon}_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)], \quad \hat{\varepsilon}_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)], \quad \hat{\varepsilon}_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)], \quad (2.55)$$

так как рассматриваются тонкие оболочки, положим $\sigma_3 = 0$, тогда $\hat{\varepsilon}_3 = \frac{\nu(\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2)}{\nu - 1}$, и с учётом (2.50) в итоге имеем следующее выражение для функции изменения толщины:

$$f_h = \exp\left[\frac{\nu}{\nu - 1}(\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2)\right]. \quad (2.56)$$

В практических целях важно привести уравнения к безразмерному виду. Введем в рассмотрение безразмерные величины следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \frac{s}{\ell}, \quad \bar{h} = \frac{h}{\ell}, \quad \bar{r} = \frac{r}{\ell}, \quad \bar{z} = \frac{z}{\ell}, \\ \bar{U} &= \frac{U}{\ell}, \quad \bar{T} = \frac{(1 - \nu^2)}{E\bar{h}\ell}T, \quad \bar{M} = \frac{12(1 - \nu^2)}{E\bar{h}^2\ell^2}M, \end{aligned} \quad (2.57)$$

где ℓ — характерный геометрический размер оболочки (например: длина меридиана, радиус). Кроме того, перейдём к параметризации функций с помощью ξ .

Физические соотношения (2.46)–(2.49) с учётом (2.57) переписутся следующим образом:

$$\bar{T}_{1\varphi} = f_h(\hat{\varepsilon}_1 + \nu\hat{\varepsilon}_2), \quad (2.58)$$

$$\frac{1}{\bar{s}_{,\xi}} \left[\bar{T}_{2r}(\bar{r}_{,\xi} \cos \gamma - \bar{z}_{,\xi} \sin \gamma) + \bar{T}_{2z}(\bar{r}_{,\xi} \sin \gamma + \bar{z}_{,\xi} \cos \gamma) \right] = f_h(\hat{\varepsilon}_2 + \nu\hat{\varepsilon}_1), \quad (2.59)$$

$$\bar{M}_{1s} = \ell \bar{h} f_h^3 (\Delta k_1 + \nu \Delta k_2), \quad (2.60)$$

$$\bar{M}_{2\varphi} = -\ell \bar{h} f_h^3 (\Delta k_2 + \nu \Delta k_1), \quad (2.61)$$

из (2.59) определим меру деформации в меридиональном направлении:

$$\hat{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\bar{s}_{,\xi} f_h} \left[\bar{T}_{2r}(\bar{r}_{,\xi} \cos \gamma - \bar{z}_{,\xi} \sin \gamma) + \bar{T}_{2z}(\bar{r}_{,\xi} \sin \gamma + \bar{z}_{,\xi} \cos \gamma) \right] - \nu \hat{\varepsilon}_1. \quad (2.62)$$

Здесь необходимо отметить, что в выражение (2.62) входит (2.56), что образует нелинейное уравнение относительно меры деформации $\hat{\varepsilon}_2$. В программной реализации это уравнение решается методом простых итераций.

Упростим и перепишем уравнения равновесия (2.44) с учётом (2.57) и (2.39):

$$\frac{d\bar{T}_{2r}}{d\xi} = -\left(\frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} + \frac{\varepsilon_{1,\xi}}{(1+\varepsilon_1)}\right)\bar{T}_{2r} + \frac{\bar{s}_{,\xi}}{\bar{r}} \frac{(1+\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_1)}\bar{T}_{1\varphi} - \bar{s}_{,\xi}(1+\varepsilon_2)\frac{(1-\nu^2)}{E\bar{h}}q_r, \quad (2.63)$$

$$\frac{d\bar{T}_{2z}}{d\xi} = -\left(\frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} + \frac{\varepsilon_{1,\xi}}{(1+\varepsilon_1)}\right)\bar{T}_{2z} - \bar{s}_{,\xi}(1+\varepsilon_2)\frac{(1-\nu^2)}{E\bar{h}}q_z, \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{M}_{2\varphi}}{d\xi} = & -\left(\frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} + \frac{\varepsilon_{1,\xi}}{(1+\varepsilon_1)}\right)\bar{M}_{2\varphi} - \frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} \frac{(1+\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_1)}\bar{M}_{1s} - \\ & - \frac{12}{\bar{h}}(1+\varepsilon_2) \left[\begin{array}{l} \bar{T}_{2r}(\bar{r}_{,\xi} \sin \gamma + \bar{z}_{,\xi} \cos \gamma) - \\ - \bar{T}_{2z}(\bar{r}_{,\xi} \cos \gamma - \bar{z}_{,\xi} \sin \gamma) \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Из физического соотношения (2.61) выразим $\gamma_{,s}$, при больших продольных деформациях и выражений для изменения кривизн (2.32), (2.33) получим:

$$\gamma_{,s} = -(1+\varepsilon_2)\frac{\bar{M}_{2\varphi}}{\ell\bar{h}f_h^3} - \nu(1+\varepsilon_2)\Delta k_1 + \varepsilon_2(z_{,ss}r_{,s} - r_{,ss}z_{,s}), \quad (2.66)$$

$$\text{где } \Delta k_1 = \frac{z_{,s}[\cos \gamma - (1+\varepsilon_1)] + r_{,s} \sin \gamma}{(1+\varepsilon_1)r};$$

при малых продольных деформациях из выражений для кривизн (2.34), получим

$$\gamma_{,s} = -\frac{\bar{M}_{2\varphi}}{\ell\bar{h}f_h^3} - \nu\Delta k_1, \quad (2.67)$$

$$\text{где } \Delta k_1 = \frac{1}{r}[z_{,s}(\cos \gamma - 1) + r_{,s} \sin \gamma].$$

Таким образом, определив $\gamma_{,s}$ по формуле (2.66) или (2.67), изменение кривизны Δk_2 будет определено по формуле (2.33) или (2.34) соответственно, тогда \bar{M}_{1s} может быть определён из физического соотношения (2.60).

В итоге с учётом (2.57) и переходом к параметризации по ξ , окончательно имеем разрешающую систему шести геометрически нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно шести функций — $\bar{U}_r, \bar{U}_z, \gamma, \bar{T}_{2r}, \bar{T}_{2z}, \bar{M}_{2\varphi}$, описывающих напряжённо-деформированное состояние осесимметричной оболочки при больших продольных деформациях, перемещениях и поворотах:

кинематические соотношения:

$$1) \frac{d\bar{U}_r}{d\xi} = (1 + \varepsilon_2)(\bar{d}_r + \bar{d}_z \theta) - \bar{r}_{,\xi}, \quad 2) \frac{d\bar{U}_z}{d\xi} = (1 + \varepsilon_2)(\bar{d}_z - \bar{d}_r \theta) - \bar{z}_{,\xi}, \quad (2.68)$$

уравнение упругости при больших продольных деформациях:

$$3) \frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{(1 + \varepsilon_2)\bar{s}_{,\xi}}{\bar{h}f_h^3} \bar{M}_{2\varphi} - \nu(1 + \varepsilon_2)\bar{s}_{,\xi} \Delta\bar{k}_1 + \frac{\varepsilon_2}{\bar{s}_{,\xi}^2} (\bar{z}_{,\xi\xi} \bar{r}_{,\xi} - \bar{r}_{,\xi\xi} \bar{z}_{,\xi}), \quad (2.69)$$

$$\text{где } \Delta\bar{k}_1 = \frac{1}{\bar{s}_{,\xi} \bar{r} (1 + \varepsilon_1)} (\bar{z}_{,\xi} [\cos \gamma - (1 + \varepsilon_1)] + \bar{r}_{,\xi} \sin \gamma), \quad \Delta\bar{k}_2 = \frac{\gamma_{,\xi} \bar{s}_{,\xi}^2 - \varepsilon_2 (\bar{z}_{,\xi\xi} \bar{r}_{,\xi} - \bar{r}_{,\xi\xi} \bar{z}_{,\xi})}{(1 + \varepsilon_2) \bar{s}_{,\xi}^3};$$

уравнение упругости при малых продольных деформациях:

$$3) \frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{\bar{s}_{,\xi}}{\bar{h}f_h^3} \bar{M}_{2\varphi} - \nu \bar{s}_{,\xi} \Delta\bar{k}_1, \quad (2.70)$$

$$\text{где } \Delta\bar{k}_1 = \frac{1}{\bar{s}_{,\xi} \bar{r}} [\bar{z}_{,\xi} (\cos \gamma - 1) + \bar{r}_{,\xi} \sin \gamma], \quad \Delta\bar{k}_2 = \frac{\gamma_{,\xi}}{\bar{s}_{,\xi}};$$

уравнения равновесия:

$$4) \frac{d\bar{T}_{2r}}{d\xi} = -A\bar{T}_{2r} + \frac{\bar{s}_{,\xi}}{\bar{r}} B\bar{T}_{1\varphi} - \bar{s}_{,\xi} (1 + \varepsilon_2) \frac{(1 - \nu^2)}{E\bar{h}} q_r, \quad (2.71)$$

$$5) \frac{d\bar{T}_{2z}}{d\xi} = -A\bar{T}_{2z} - \bar{s}_{,\xi} (1 + \varepsilon_2) \frac{(1 - \nu^2)}{E\bar{h}} q_z,$$

$$6) \frac{d\bar{M}_{2\varphi}}{d\xi} = -A\bar{M}_{2\varphi} - \frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} B\bar{M}_{1s} - \frac{12}{\bar{h}} (1 + \varepsilon_2) (\bar{T}_{2r} \bar{d}_z - \bar{T}_{2z} \bar{d}_r), \quad (2.72)$$

дополнительные выражения и обозначения:

$$\bar{d}_r = (\bar{r}_{,\xi} \cos \gamma - \bar{z}_{,\xi} \sin \gamma), \quad \bar{d}_z = (\bar{r}_{,\xi} \sin \gamma + \bar{z}_{,\xi} \cos \gamma), \quad \theta = \frac{E(\bar{d}_z \bar{T}_{2r} - \bar{d}_r \bar{T}_{2z})}{\kappa G (1 - \nu^2) \bar{s}_{,\xi} f_h},$$

$$A = \left(\frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} + \frac{\varepsilon_{1,\xi}}{(1 + \varepsilon_1)} \right), \quad \varepsilon_{1,\xi} = \left(\frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}^2} \bar{U}_r - \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{U}_r}{d\xi} \right), \quad B = \frac{(1 + \varepsilon_2)}{(1 + \varepsilon_1)}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{\bar{r}} \bar{U}_r, \quad \varepsilon_2 = \exp(\hat{\varepsilon}_2) - 1,$$

$$\hat{\varepsilon}_2 = \frac{\bar{T}_{2r} \bar{d}_r + \bar{T}_{2z} \bar{d}_z}{\bar{s}_{,\xi} f_h(\hat{\varepsilon}_2)} - \nu \hat{\varepsilon}_1, \quad f_h(\hat{\varepsilon}_2) = \exp \left[\frac{\nu}{\nu - 1} (\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2) \right], \quad \hat{\varepsilon}_1 = \ln(1 + \varepsilon_1), \quad (2.73)$$

$$\bar{T}_{1\varphi} = f_h(\hat{\varepsilon}_1 + \nu \hat{\varepsilon}_2), \quad \bar{M}_{1s} = \bar{h} f_h^3 (\Delta\bar{k}_1 + \nu \Delta\bar{k}_2).$$

Необходимо отметить, что имеется два варианта учёта изменения кривизн: при больших продольных деформациях (2.69) и при малых — (2.70). При тестировании уравнений, вычисление изменений кривизны по формуле (2.70) дали лучшее приближение к решениям, получаемым в ANSYS.

Линеаризуем систему уравнений (2.68)–(2.72) относительно деформаций, поворотов, перемещений, усилий и моментов, получим геометрически линейную систему уравнений осесимметричной оболочки:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{d\bar{U}_r}{d\xi} = \bar{r}_{,\xi} \varepsilon_2 - \bar{z}_{,\xi} \gamma + \bar{z}_{,\xi} \theta, \\
 2) \quad & \frac{d\bar{U}_z}{d\xi} = \bar{z}_{,\xi} \varepsilon_2 + \bar{r}_{,\xi} \gamma - \bar{r}_{,\xi} \theta, \\
 3) \quad & \frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{\bar{s}_{,\xi}}{h} \bar{M}_{2\varphi} - \nu \frac{\bar{r}_{,\xi}}{r} \gamma, \\
 4) \quad & \frac{d\bar{T}_{2r}}{d\xi} = (\nu - 1) \frac{\bar{r}_{,\xi}}{r} \bar{T}_{2r} + \nu \frac{\bar{z}_{,\xi}}{r} \bar{T}_{2z} + (1 - \nu^2) \frac{\bar{s}_{,\xi}}{r} \varepsilon_1 - \bar{s}_{,\xi} \frac{(1 - \nu^2)}{Eh} q_r, \\
 5) \quad & \frac{d\bar{T}_{2z}}{d\xi} = -\frac{\bar{r}_{,\xi}}{r} \bar{T}_{2z} - \bar{s}_{,\xi} \frac{(1 - \nu^2)}{Eh} q_z, \\
 6) \quad & \frac{d\bar{M}_{2\varphi}}{d\xi} = (\nu - 1) \frac{\bar{r}_{,\xi}}{r} \bar{M}_{2\varphi} - (1 - \nu^2) \frac{\bar{r}_{,\xi}^2}{r^2} \frac{\bar{h}}{\bar{s}_{,\xi}} \gamma - \frac{12}{h} (\bar{T}_{2r} \bar{z}_{,\xi} - \bar{T}_{2z} \bar{r}_{,\xi}),
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

где $\varepsilon_1 = \frac{1}{r} \bar{U}_r$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{\bar{s}_{,\xi}} (\bar{T}_{2r} \bar{r}_{,\xi} + \bar{T}_{2z} \bar{z}_{,\xi}) - \nu \varepsilon_1$, $\theta = \frac{E (\bar{z}_{,\xi} \bar{T}_{2r} - \bar{r}_{,\xi} \bar{T}_{2z})}{\kappa G (1 - \nu^2) \bar{s}_{,\xi}}$.

Необходимо отметить, что система линейных дифференциальных уравнений (2.74) отличается от системы, полученной в работе [22], наличием слагаемых от поперечного сдвига (угол θ), а также множителей $\bar{s}_{,\xi}$, которые появились при введении произвольной параметризации функций. В работе [22] рассматривается частный случай системы (2.74), когда $\bar{s}_{,\xi} = 1$, что соответствует введению параметризации $\xi = s / \ell$.

2.3 Программная реализация и тестовые расчёты

Полученные уравнения (2.68)–(2.74) совместно с краевыми условиями, наложенными на функции в начале и конце меридиана, представляют собой краевую задачу. Для решения краевой задачи был использован подход [23, 24], основанный центральной конечно-разностной аппроксимации. В приложении А приведён текст программы Fortran, разработанной для решения тестовых задач раздутия оболочек внутренним давлением. Для решения двухточечной краевой задачи используется подпрограмма BVFPD (алгоритм которой описан в [23]) из библиотеки IMSL в среде Compaq Visual Fortran 6.6. Кроме того, полученные системы нелинейных и линейных уравнений внедрены в код программного комплекса DARSYS [131] (акт внедрения приведён в приложении В), поэтому далее результаты расчёта по полученным уравнениям будут обозначаться этим названием.

Для тестирования уравнений были рассмотрены несколько простейших задач осесимметричного деформирования оболочек вращения. В качестве эталона для сравнения принимались результаты расчёта в пакете ANSYS. Для этого разработаны макросы на языке APDL (приложение Б), позволяющие проводить параметрические расчёты при варьировании типа конечного элемента, величины нагрузки и степени дискретизации модели. В таблицах Б.1–8 приведён набор макросов для расчёта тестовых задач. В таблице Б.1 приведён текст главного макроса, из которого вариативно вызывается конфигурационный файл с конкретной геометрией оболочки, краевыми условиями, типом расчёта.

2.3.1 Цилиндрическая оболочка

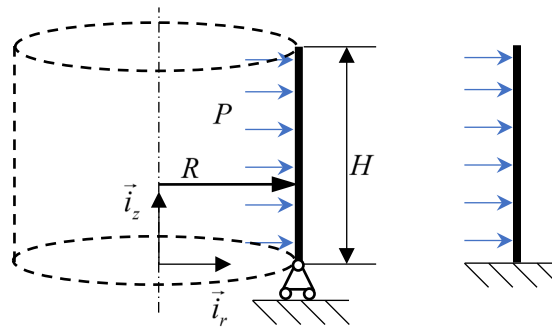
Рассмотрим задачу о деформировании цилиндрической оболочки под действием внутреннего распределённого давления P (рисунок 2.5). Радиус

$R = 0.5\text{ м}$, толщина $h = 0.02\text{ м}$, высота $H = 0.7\text{ м}$, модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^7\text{ Па}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Меридиан зададим следующим образом:

$$r(\xi) = R, \quad z(\xi) = \xi \cdot H, \quad (0 \leq \xi \leq 1), \quad (2.75)$$

краевые условия: $\xi = 0$: $\bar{T}_{2r} = \bar{T}_{2z} = \bar{M}_{2\varphi} = 0$;

$$\xi = 1: \text{ а) } \bar{T}_{2r} = \bar{U}_z = \bar{M}_{2\varphi} = 0, \text{ б) } \bar{U}_r = \bar{U}_z = \gamma = 0. \quad (2.76)$$



а) свободная

б) закреплённая

Рисунок 2.5 — Цилиндрическая оболочка. Расчётные схемы

На рисунках 2.6–2.7 приведены зависимости полного перемещения верхней точки меридиана от числа разбиений вдоль него, рассчитанные с помощью скрипта APDL в ANSYS и по формулам (2.68)–(2.73) в DARSYS при значении давления $P = 1.1 \cdot 10^5\text{ Па}$ при свободном опирании (рисунок 2.6) и при закреплении (рисунок 2.7). На рисунке 2.8 приведены деформированные конфигурации меридиана свободного и закрепленного цилиндра.

При относительно малых толщинах оболочки влияние сдвиговых деформаций, учтённое формулой (2.38), мало. Для тестирования работоспособности полученных формул, проведем расчёт закреплённой цилиндрической оболочки с увеличенной в 10 раз толщиной ($h = 0.2\text{ м}$) с учётом сдвига и без него. На рисунке 2.9 приведены рассчитанные конфигурации меридиана при давлении $P = 1.3 \cdot 10^6\text{ Па}$ и разных коэффициентах Пуассона: $\nu = 0, 0.3, 0.49$.

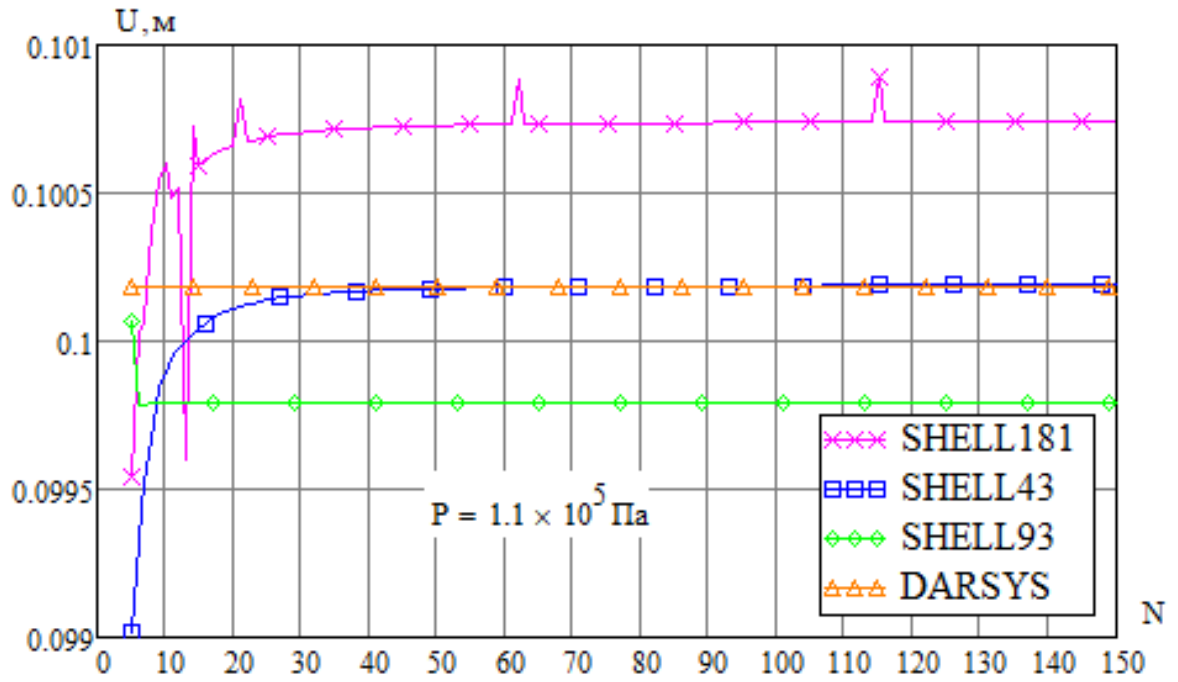


Рисунок 2.6 — Сходимость перемещения при варьировании числа разбиений свободной цилиндрической оболочки

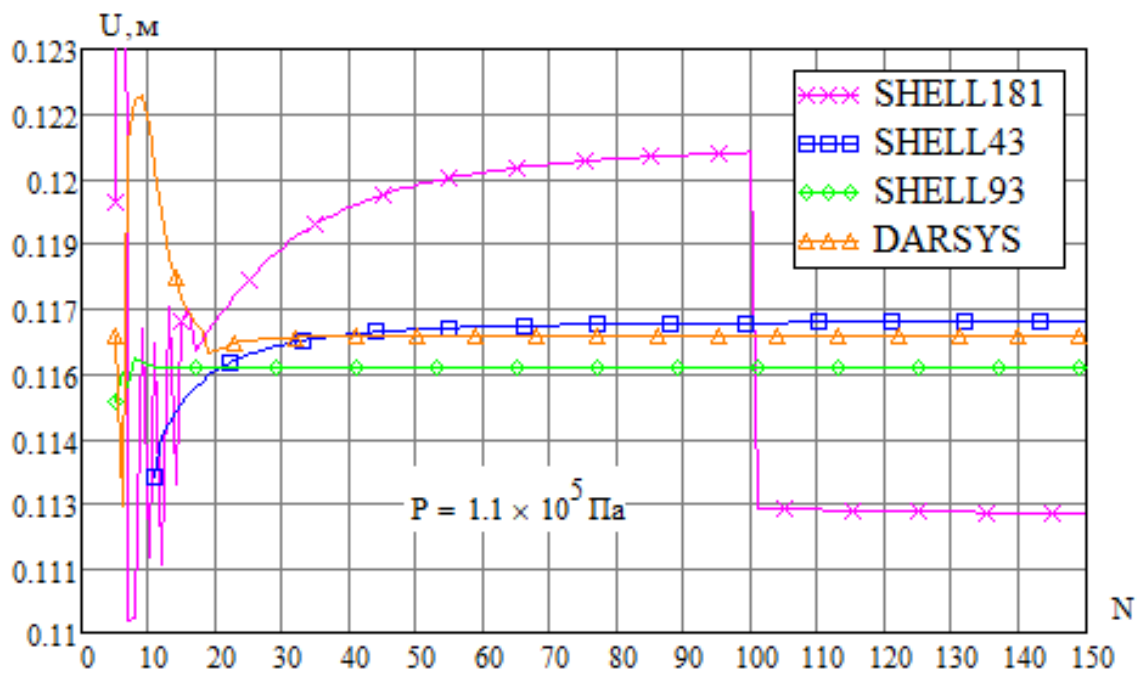


Рисунок 2.7 — Сходимость перемещения при варьировании числа разбиений заземлённой цилиндрической оболочки

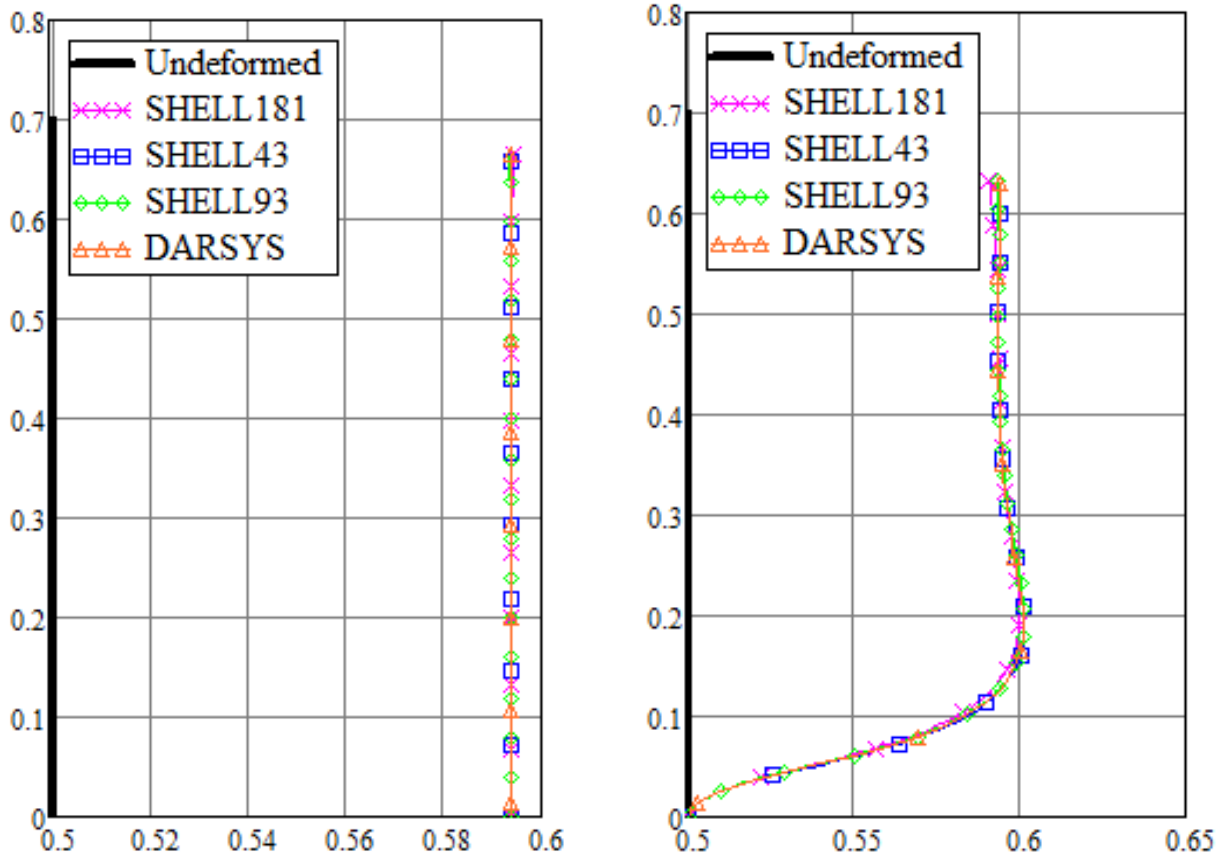


Рисунок 2.8 — Деформированные конфигурации свободной (слева) и закреплённой (справа) цилиндрической оболочки

Из рисунка 2.9 видно, что учёт сдвига по разработанным формулам вносит существенный вклад для толстой оболочки и достаточно хорошо согласуется с расчётами в ANSYS. Необходимо отметить, что наилучшую сходимость результатов с ANSYS показали расчёты с коэффициентом коррекции сдвига $\kappa = \pi^2 / 12$.

На рисунке 2.10 приведены зависимости перемещения верхней точки меридиана от давления, рассчитанные разными КЭ в ANSYS и в DARSYS по разработанным формулам. Из рисунка видно, что результаты хорошо согласуются между собой.

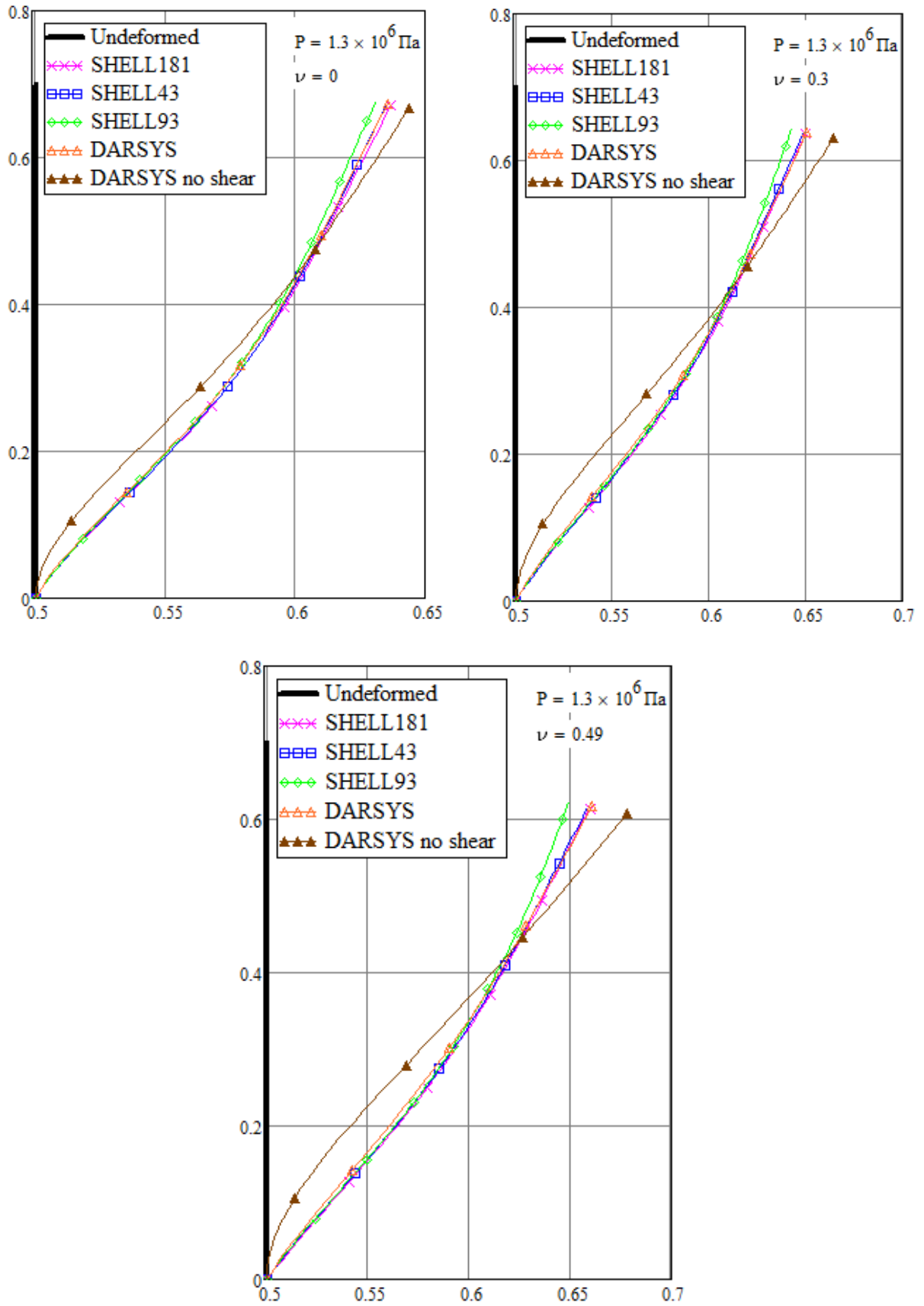


Рисунок 2.9 — Влияние учёта сдвига при деформировании толстой цилиндрической оболочки

Необходимо отметить, что нелинейность графиков обусловлена не только и не столько геометрической нелинейностью уравнений, сколько уменьшением толщины и увеличением площади действия внутреннего давления при деформировании.

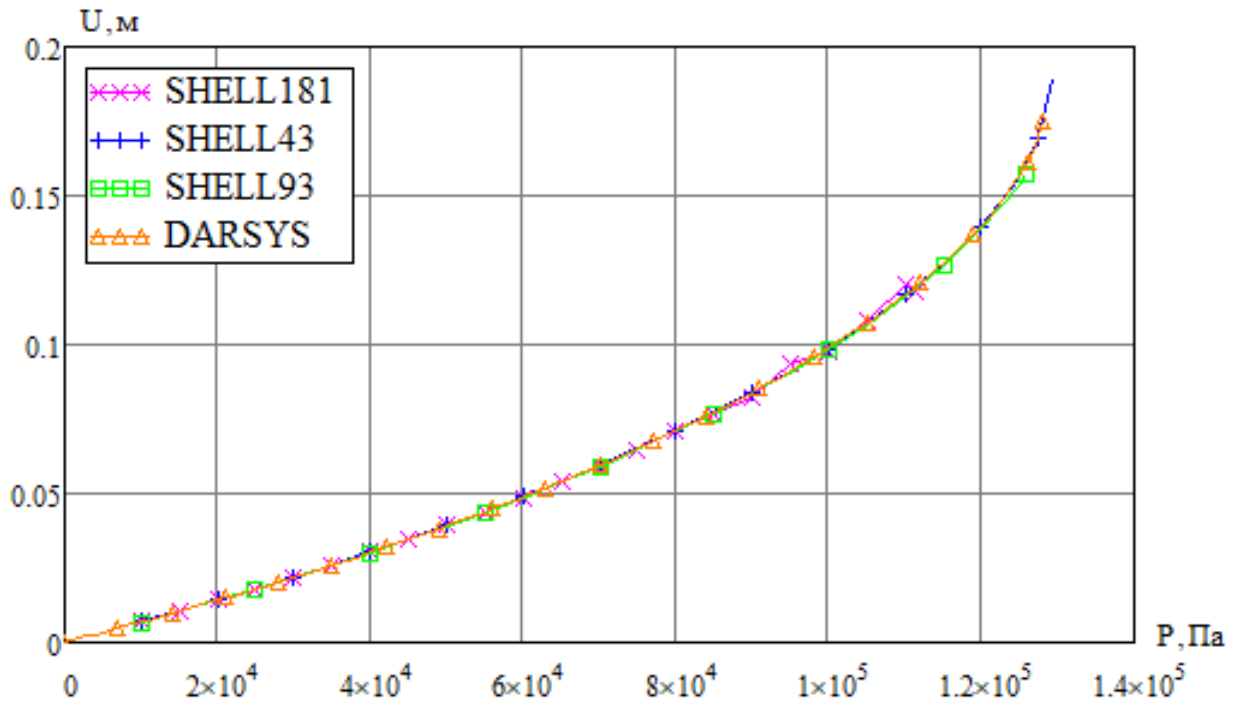


Рисунок 2.10 — Зависимость перемещения от давления защемлённой цилиндрической оболочки

На рисунках 2.11 и 2.12 показаны кривые, полученные из решения линейных уравнений (2.74). На рисунке 2.11 перемещение определено для защемлённого цилиндра при $\nu = 0,3$ и $\nu = 0$. Видно, что результаты хорошо согласуются с ANSYS. Перемещения свободного цилиндра на рисунке 2.12 определены при $\nu = 0,3$. Видно, что кривая SHELL93 стремится к другой асимптоте, а остальные сходятся к DARSYS.

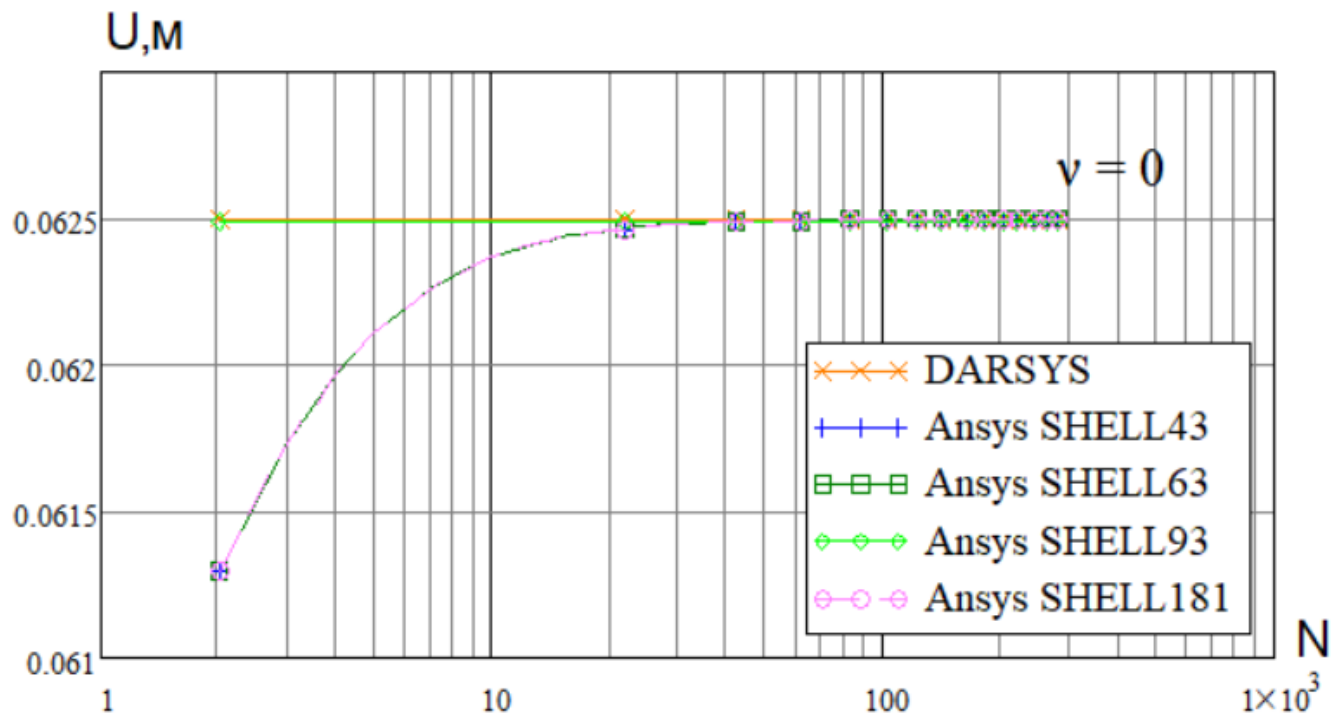
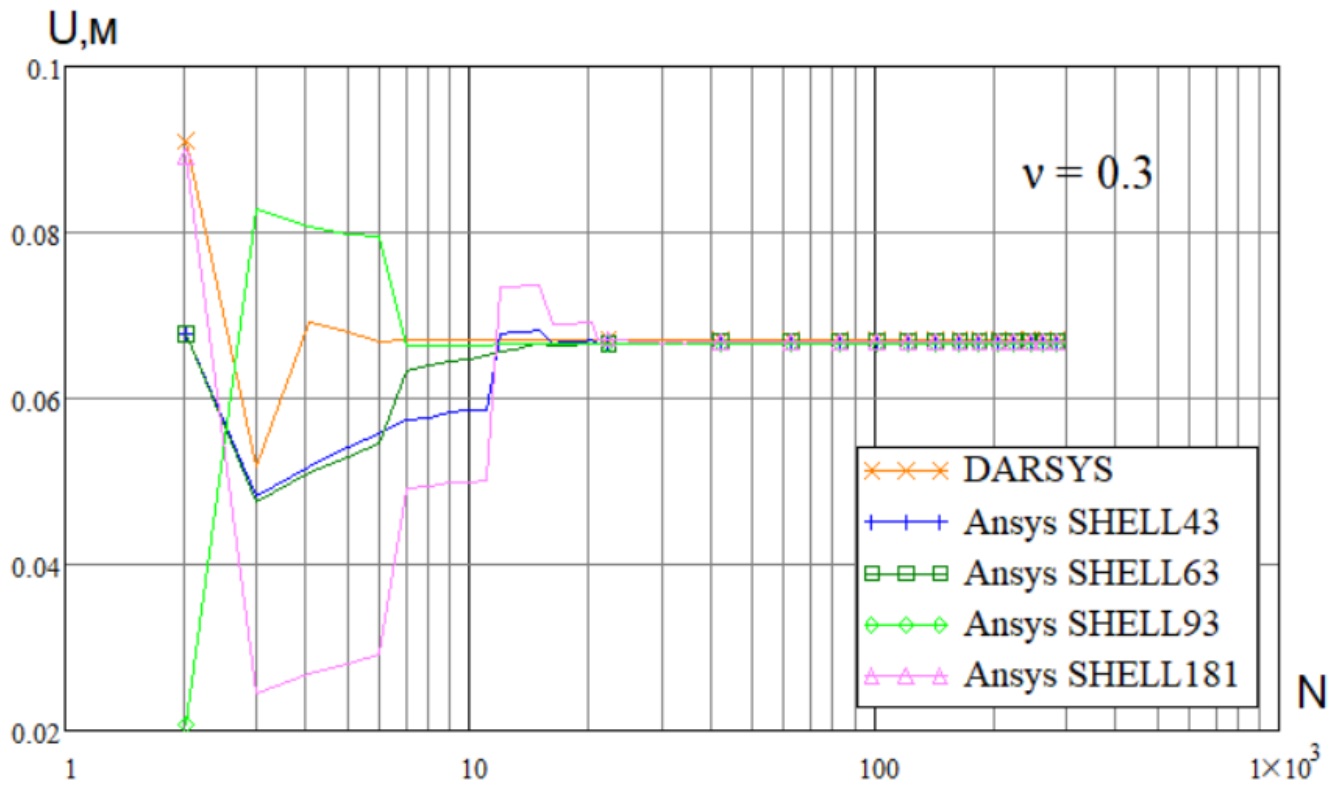


Рисунок 2.11 — Сходимость перемещения при варьировании числа разбиений заземлённой цилиндрической оболочки в линейной постановке

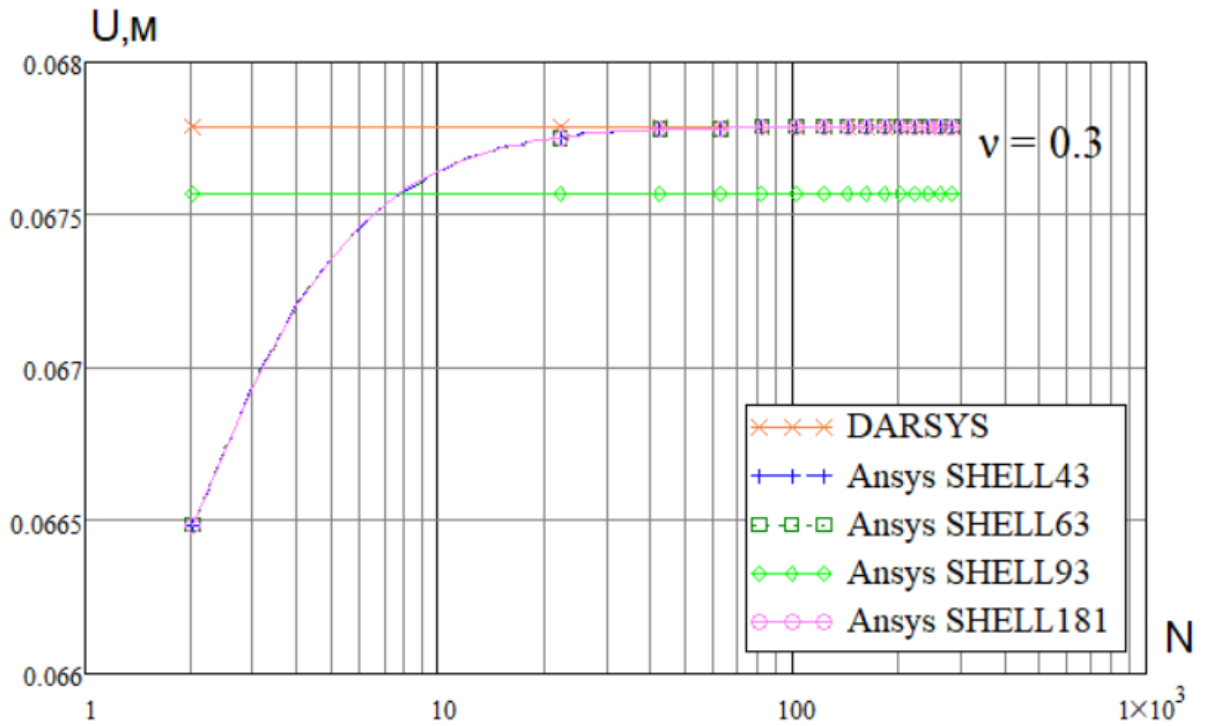


Рисунок 2.12 — Сходимость перемещения при варьировании числа разбиений свободной цилиндрической оболочки в линейной постановке

2.3.2 Сферическая оболочка

Рассмотрим задачу о деформировании сферической оболочки радиуса $R = 0.5 \text{ м}$ под действием внутреннего давления P (рисунок 2.13). Толщина $h = 0.02 \text{ м}$, материал взят из предыдущего примера.

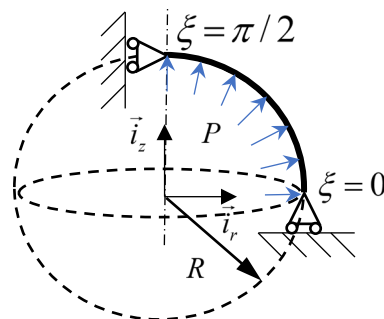


Рисунок 2.13 — Сферическая оболочка. Расчётная схема

В качестве безразмерного параметра длины удобно выбрать угол между радиус-вектором и осью \vec{i}_r : $0 \leq \xi \leq \pi/2$, тогда меридиан можно описать так:

$$r(\xi) = R \cos(\xi) + \delta, \quad z(\xi) = R \sin(\xi), \quad (2.77)$$

где $\delta = 10^{-12} \text{ м} \ll R$ — константа для разрешения численной неопределённости в верхней точке. Краевые условия:

$$\xi = 0: \bar{T}_{2r} = \bar{U}_z = \gamma = 0; \quad \xi = \pi / 2: \bar{U}_r = \bar{T}_{2z} = \gamma = 0. \quad (2.78)$$

На рисунке 2.14 приведены зависимости полного перемещения точек меридиана от числа разбиений (перемещения всех точек равны), рассчитанные с помощью скрипта APDL в ANSYS и по формулам (2.68)–(2.73) в DARSYS при значении давления $P = 4 \cdot 10^5 \text{ Па}$. На рисунке 2.15 показаны соответствующие деформированные конфигурации меридианов. На рисунке 2.16 приведены зависимости перемещения сферической оболочки от давления. Из рисунков видно, что результаты хорошо согласуются.

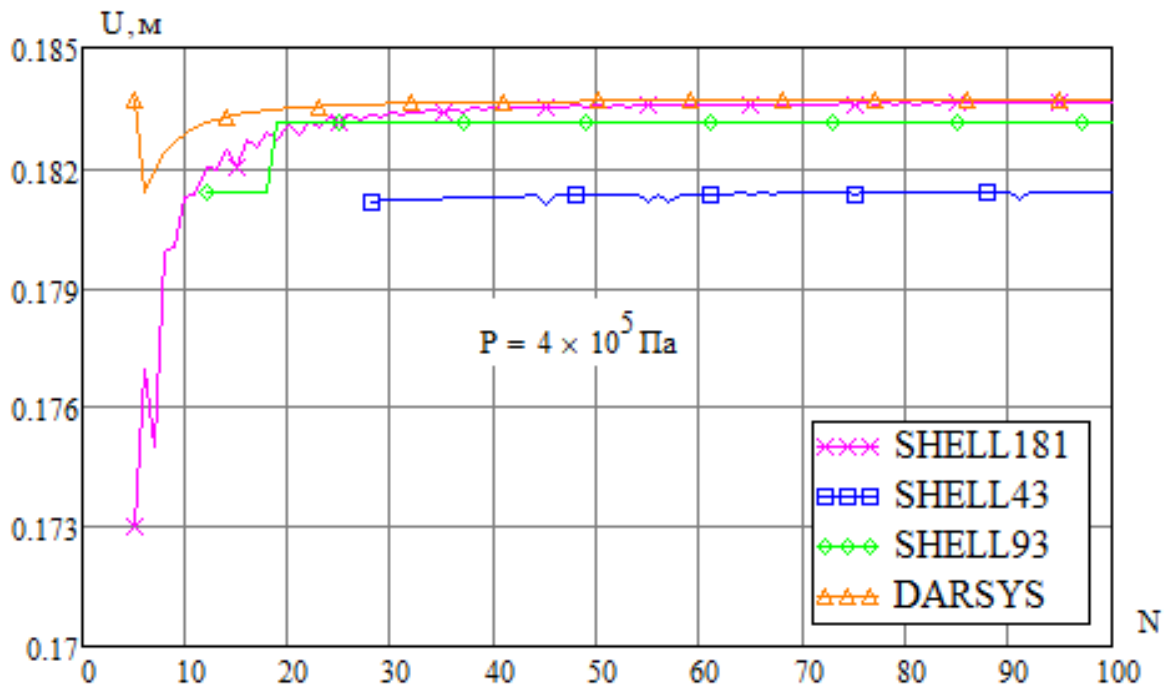


Рисунок 2.14 — Сходимость перемещения при варьировании числа разбиений сферической оболочки

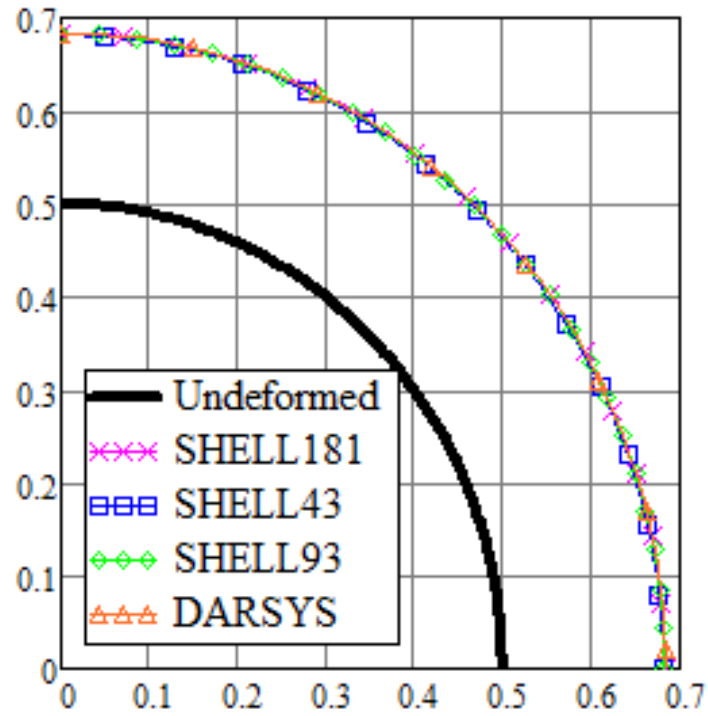


Рисунок 2.15 — Деформированная конфигурация меридиана сферической оболочки

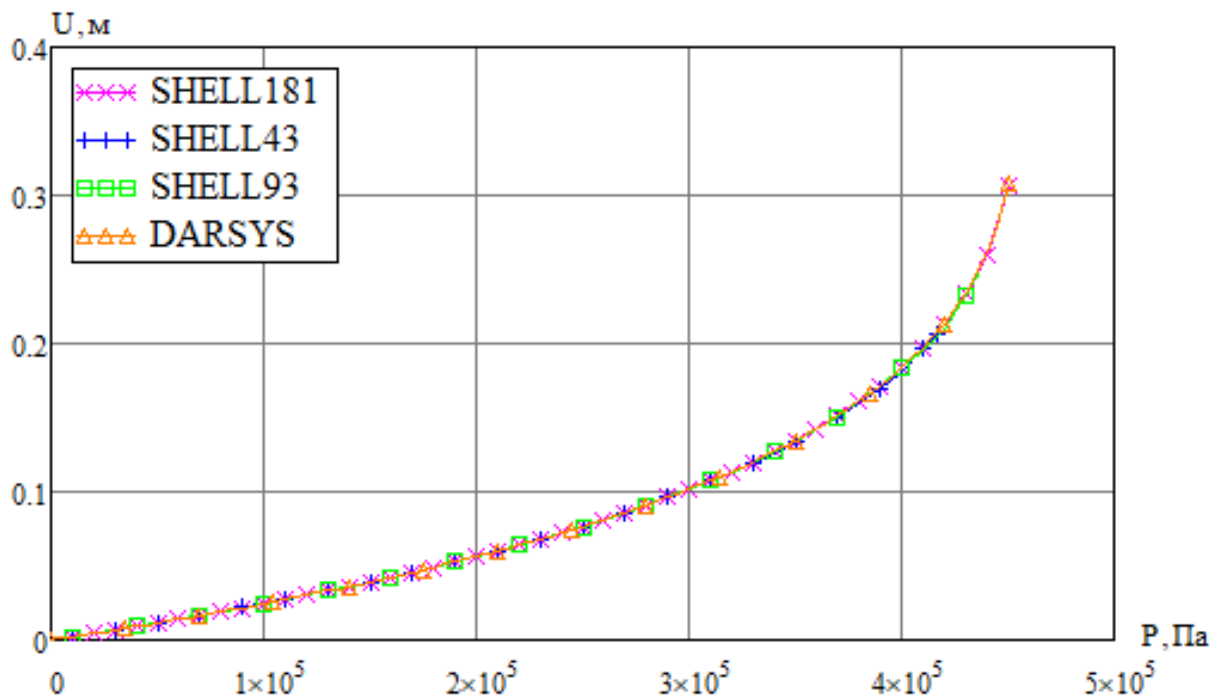


Рисунок 2.16 — Зависимость перемещения точки сферической оболочки от давления

На рисунке 2.17 показана сходимость перемещения при разном числе разбиений использованием линейных уравнений (2.74). В данной задаче имеется теоретическое решение. Видно, что DARSYS, SHELL93 и SHELL181 сходятся к теоретическому значению, а SHELL43 и SHELL63 колеблются.

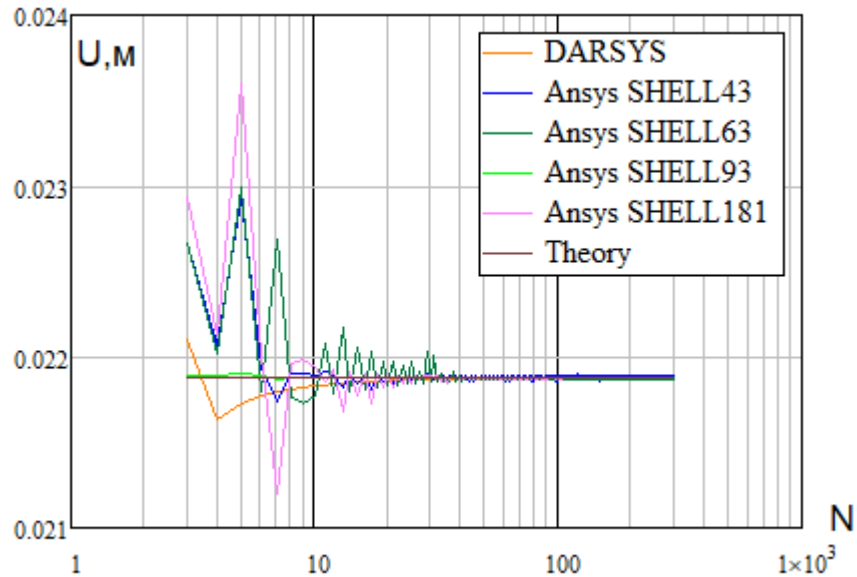


Рисунок 2.17 — Сходимость перемещения при изменении числа разбиений в линейной постановке задачи

2.3.3 Эллиптическая оболочка

Рассмотрим задачу о деформировании эллиптической оболочки с полуосями $a = 0.4 м$, $b = 2a$ под действием внутреннего давления P (рисунок 2.18). Толщина и материал взяты из предыдущих примеров.

В качестве безразмерного параметра длины выбран угол между радиус-вектором и осью \vec{i}_r : $0 \leq \xi \leq \pi / 2$, тогда меридиан можно описать так:

$$r(\xi) = a \cos(\xi) + \delta, \quad z(\xi) = b \sin(\xi), \quad (2.79)$$

где $\delta = 10^{-12} м \ll R$ — малая константа для разрешения неопределённости в полюсе. Краевые условия совпадают с условиями для сферы (2.78).

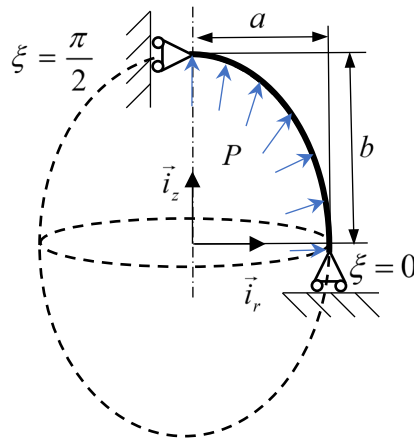


Рисунок 2.18 — Эллиптическая оболочка. Расчётная схема

На рисунке 2.19 приведены зависимости полного перемещения точки меридиана, лежащей на малой полуоси \vec{i}_r ($\xi = 0$) от числа разбиений, рассчитанные с помощью скрипта APDL в ANSYS и по формулам (2.68)–(2.73) в DARSYS при значении давления $P = 3.3 \cdot 10^5 \text{ Па}$, на рисунке 2.20 приведена соответствующая конфигурация меридиана.

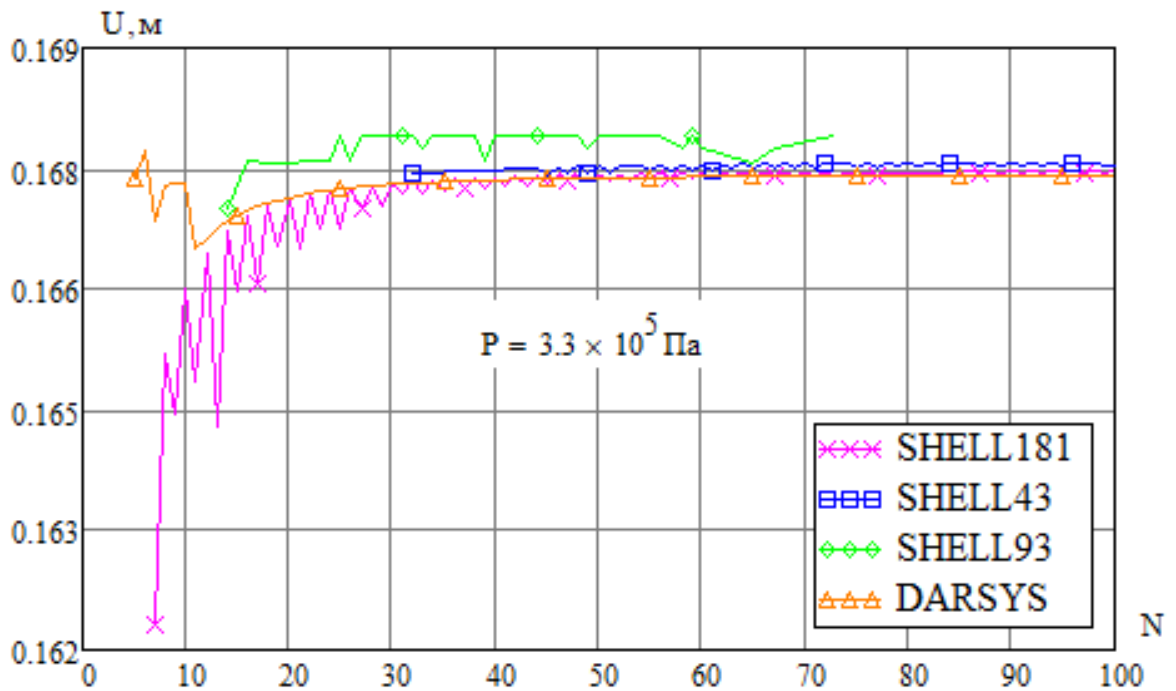


Рисунок 2.19 — Сходимость перемещения при варьировании числа разбиений эллиптической оболочки и деформированная конфигурация

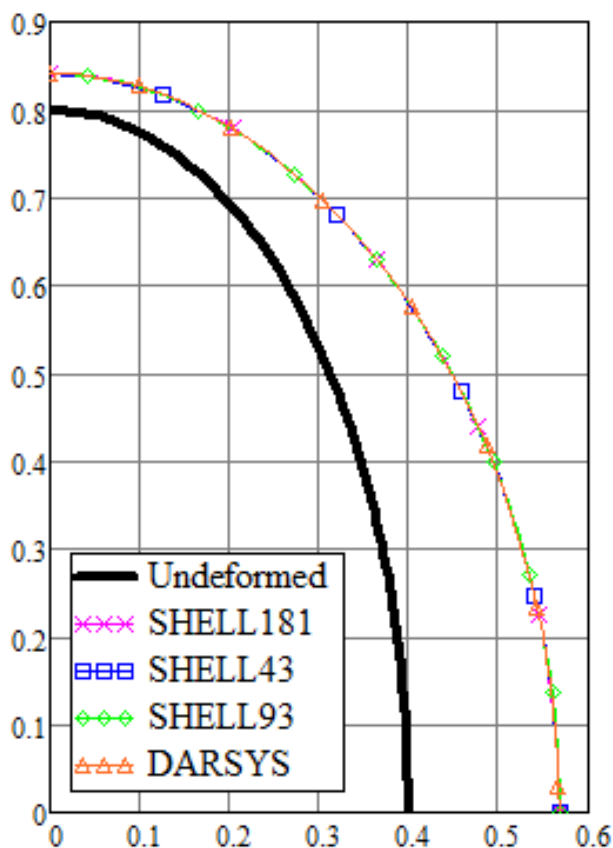


Рисунок 2.20 — Деформированная конфигурация меридиана сферической оболочки

На рисунке 2.21 приведены зависимости перемещения эллиптической оболочки от давления. Из рисунков видно, что результаты хорошо согласуются.

Необходимо отметить, что предлагаемые уравнения геометрически линейного и нелинейного деформирования, полученные для произвольной параметризации меридиана, в отличие от линейных уравнений, полученных в [22], где для описания геометрии эллиптической оболочки нужно привлекать громоздкие формулы связи между длиной дуги и угла. В формулах (2.68)–(2.74) параметризация очень проста в использовании. Кроме того, применение МКР в конечном итоге приводит к решению СЛАУ с матрицами, которые не содержат параметр ξ в явном виде, следовательно, формулирование исходных данных не требует обязательной записи аналитических формул для меридиана и могут формироваться поэлементно, аналогично формированию исходных данных для применения метода конечных элементов.

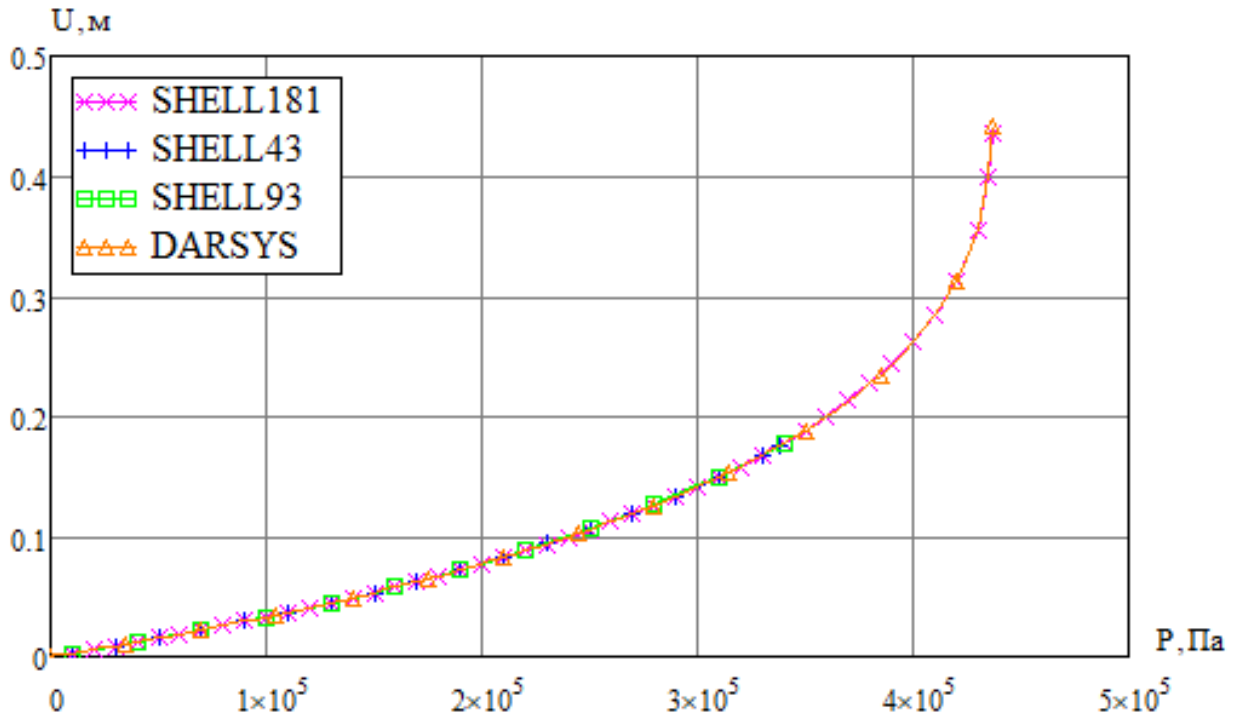


Рисунок 2.21 — Зависимость перемещения точки экватора эллиптической оболочки от давления

На рисунке 2.22 приведены зависимости перемещений от числа разбиений, рассчитанные по линейным уравнениям (2.74). Из рисунка видно, что кривые стремятся к одной асимптоте.

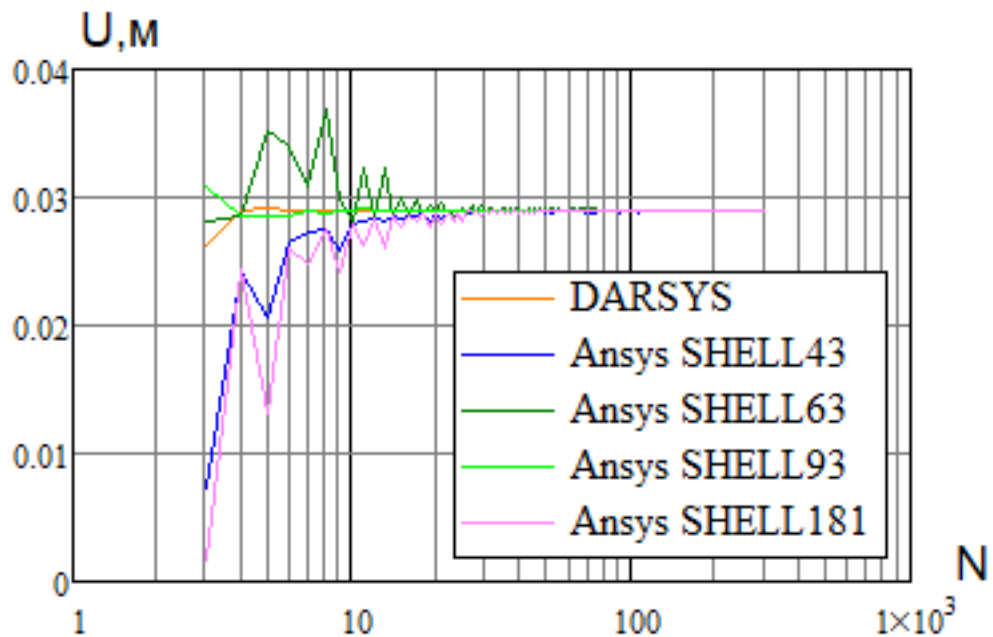


Рисунок 2.22 — Сходимость перемещения при варьировании числа разбиений

2.3.4 Коническая оболочка

Рассмотрим задачу о деформировании конической оболочки под действием внутреннего распределённого давления P , радиус окружности основания $R = 0.5 \text{ м}$, угол конуса $\varphi = \pi / 6$ (рисунок 2.23), толщину и параметры материала взяты из предыдущих примеров. Точки меридиана опишем следующими формулами:

$$r(\xi) = R\xi + \delta, \quad z(\xi) = \frac{R(1-\xi)}{\tan \phi}, \quad 0 < \xi < 1, \quad (2.80)$$

где $\delta = 10^{-12} \text{ м} \ll R$ — малая константа для разрешения неопределённости в вершине конуса. Краевые условия:

$$\text{при } \xi = 0: \bar{T}_{2z} = \bar{U}_r = \gamma = 0; \quad \text{при } \xi = 1: \bar{U}_r = \bar{U}_z = \gamma = 0. \quad (2.81)$$

Здесь необходимо отметить, что обезразмеривание величин в (2.57), в частности перемещений и длин, можно проводить к единице длины, и не обязательно использовать реальные геометрические параметры, связанные с оболочкой. Поэтому здесь и в других примерах для описания меридиана используются размерные величины длин, а получаемые результаты при выборе разных параметров обезразмеривания длин неразличимы между собой.

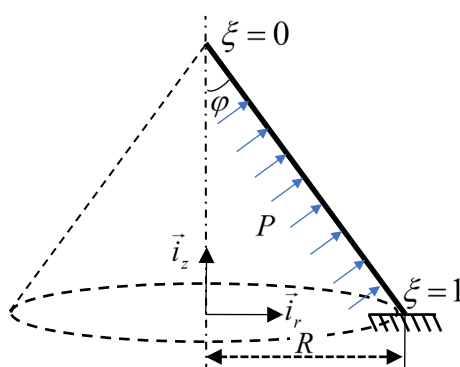


Рисунок 2.23 — Коническая оболочка. Расчётная схема

На рисунке 2.24 приведены зависимости полного перемещения вершины конуса ($\xi = 0$) от числа разбиений, рассчитанные с помощью скрипта APDL в ANSYS и по формулам (2.68)–(2.73) в DARSYS при значении давления

$P = 3.5 \cdot 10^5 \text{ Па}$. На рисунке 2.25 приведены зависимости перемещения от давления. Из рисунков видно, что результаты хорошо согласуются. На рисунке 2.26 представлены деформированные конфигурации меридиана при давлении $P = 3.5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и $P = 6 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

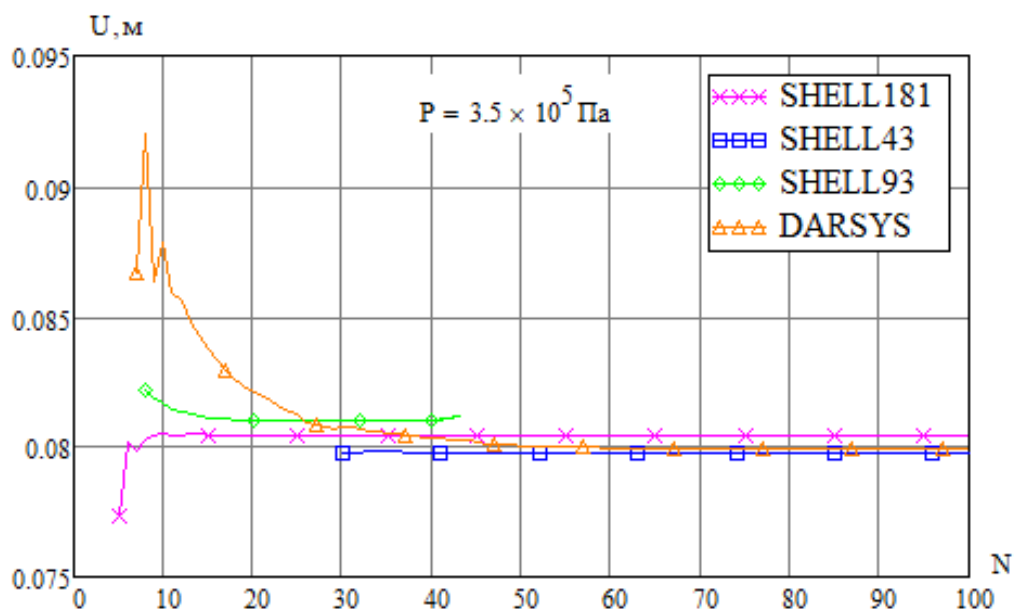


Рисунок 2.24 — Сходимость перемещения при варьировании числа разбиений конической оболочки

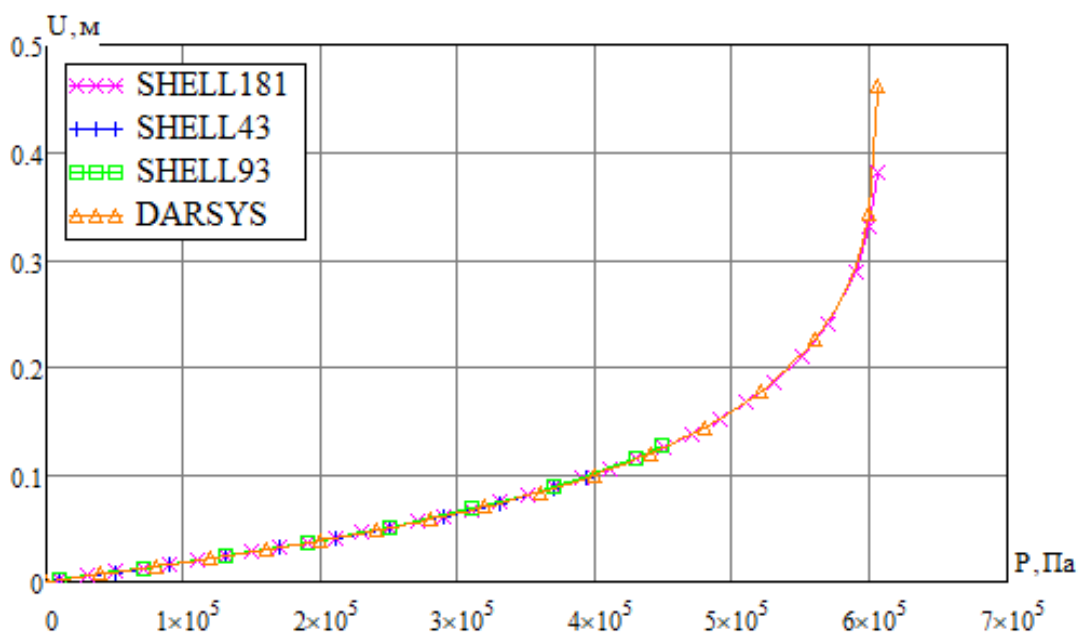


Рисунок 2.25 — Зависимость перемещения вершины конической оболочки от давления

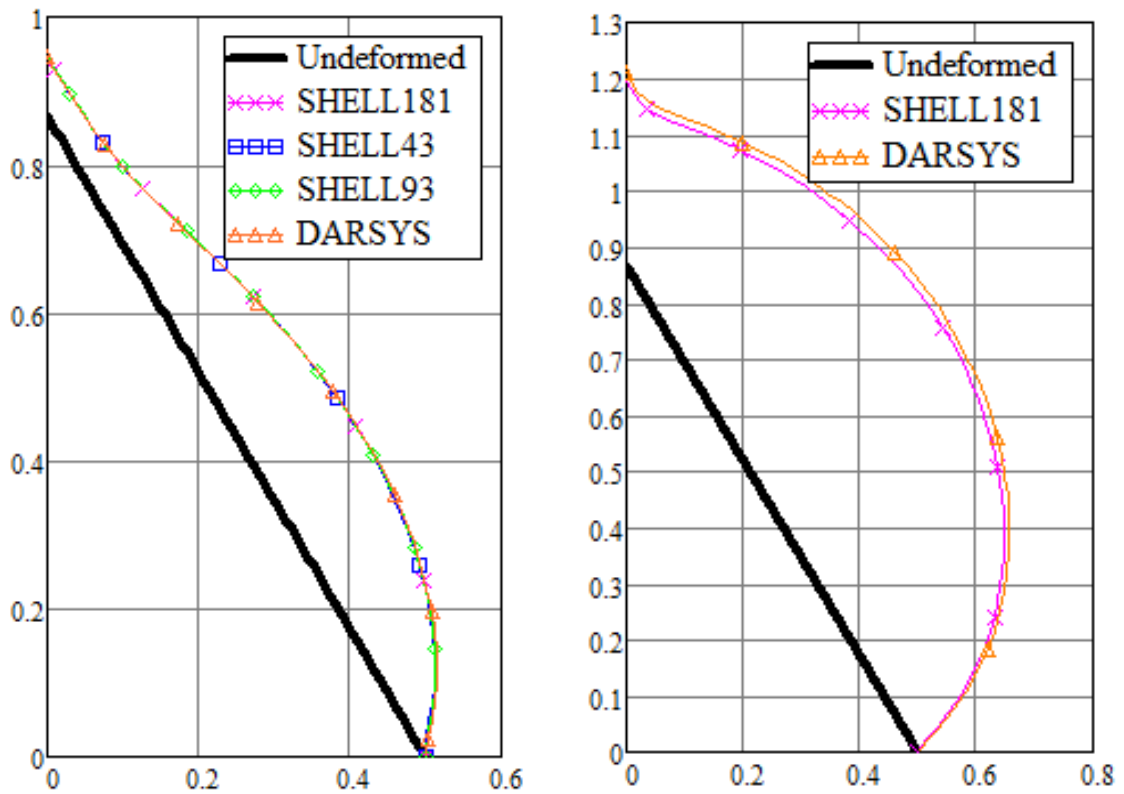


Рисунок 2.26 — Деформированная конфигурация меридиана при давлении $P = 3.5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ (слева) и $P = 6 \cdot 10^5 \text{ Па}$ (справа)

На рисунке 2.27 приведены результаты, полученные при решении линейных уравнений (2.74). Видно, что графики SHELL63, SHELL93, SHELL181 стремятся к одной асимптоте, а SHELL43 стремится к другой асимптоте.

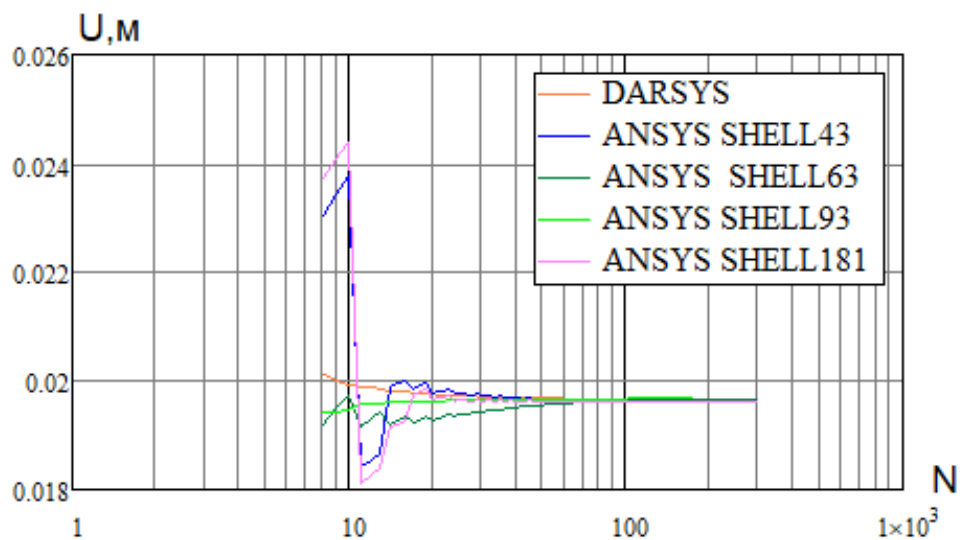


Рисунок 2.27 — Сходимость перемещения при изменении числа разбиений в линейной постановке

2.3.5 Составная оболочка

Рассмотрим задачу о деформировании составной оболочки (рисунок 2.28) под действием внутреннего распределённого давления P , радиус цилиндра $R = 0.5 \text{ м}$, высота цилиндра $H = 0.8 \text{ м}$, длина образующей конуса $L = 0.3 \text{ м}$, $\varphi = \pi / 6$, толщина и материал взяты из предыдущих примеров. Координаты точек меридиана удобно задать двумя участками на интервале $0 \leq \xi \leq 2$ следующим образом:

$$r(\xi) = \begin{cases} R - L \sin(\varphi)(1 - \xi), & 0 \leq \xi < 1 \\ R, & 1 \leq \xi \leq 2 \end{cases}$$

$$z(\xi) = \begin{cases} H + L \cos(\varphi)(1 - \xi), & 0 \leq \xi < 1 \\ H(2 - \xi), & 1 \leq \xi \leq 2 \end{cases} \quad (2.82)$$

Краевые условия:

$$\xi = 0: \bar{T}_{2r} = \bar{T}_{2z} = \bar{M}_{2\varphi} = 0; \quad \xi = 2: \bar{U}_r = \bar{U}_z = \gamma = 0. \quad (2.83)$$

Условия стыковки в DARSYS реализованы в автоматическом режиме (достаточно указать точки, в которых есть разрывы функций исходных данных), однако разработанные уравнения могут решаться без стыковки, но это приводит к пилообразному изменению (в пределах погрешности вычислений) рассчитываемого перемещения точки при плавном изменении дискретизации.

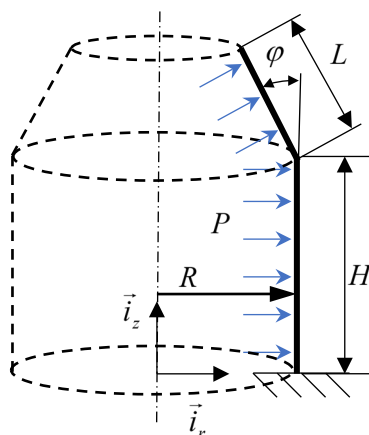


Рисунок 2.28 — Составная оболочка. Расчётная схема

На рисунке 2.29 приведены зависимости полного перемещения верхней точки меридиана составной оболочки ($\xi = 0$) от числа разбиений, рассчитанные с помощью скрипта APDL в ANSYS разными конечными элементами и по формулам (2.68)–(2.73) в DARSYS при значении давления $P = 1.8 \cdot 10^5 \text{ Па}$, на рисунке 2.30 показаны соответствующие деформированные конфигурации меридиана.

На рисунке 2.31 приведены зависимости перемещения той же точки от давления. Из рисунков видно, что результаты хорошо согласуются.

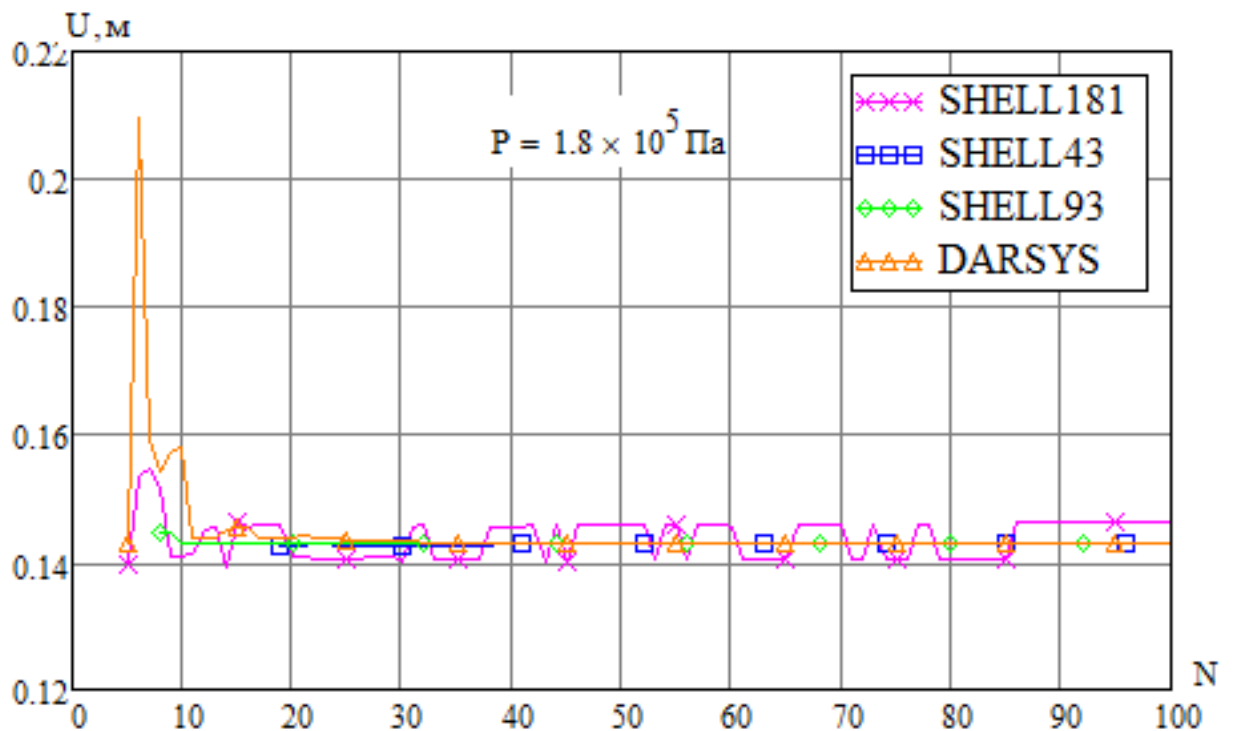


Рисунок 2.29 — Сходимость перемещения при варьировании числа разбиений составной оболочки

На рисунке 2.32 показаны графики результатов, полученных при решении линейных уравнений (2.74) с изменением числа разбиений. Видно, что результаты стремятся к одной асимптоте.

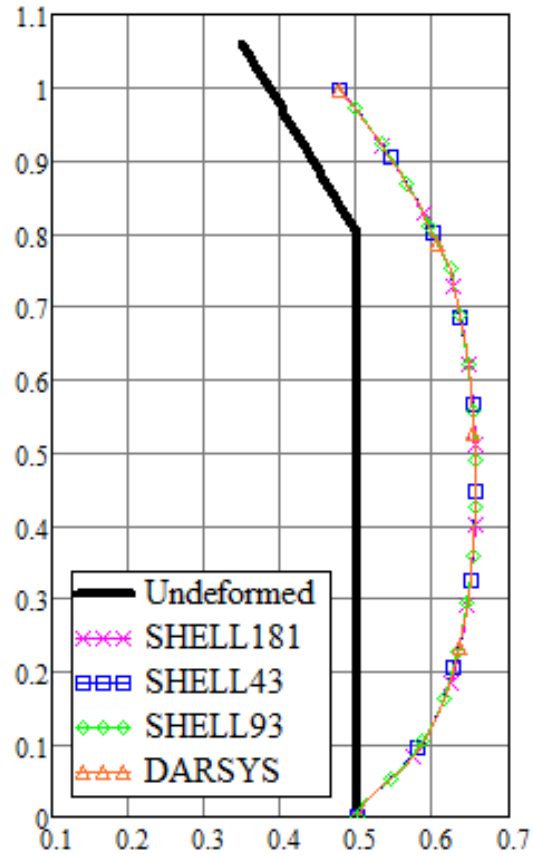


Рисунок 2.30 — Деформированная конфигурация меридиана составной оболочки

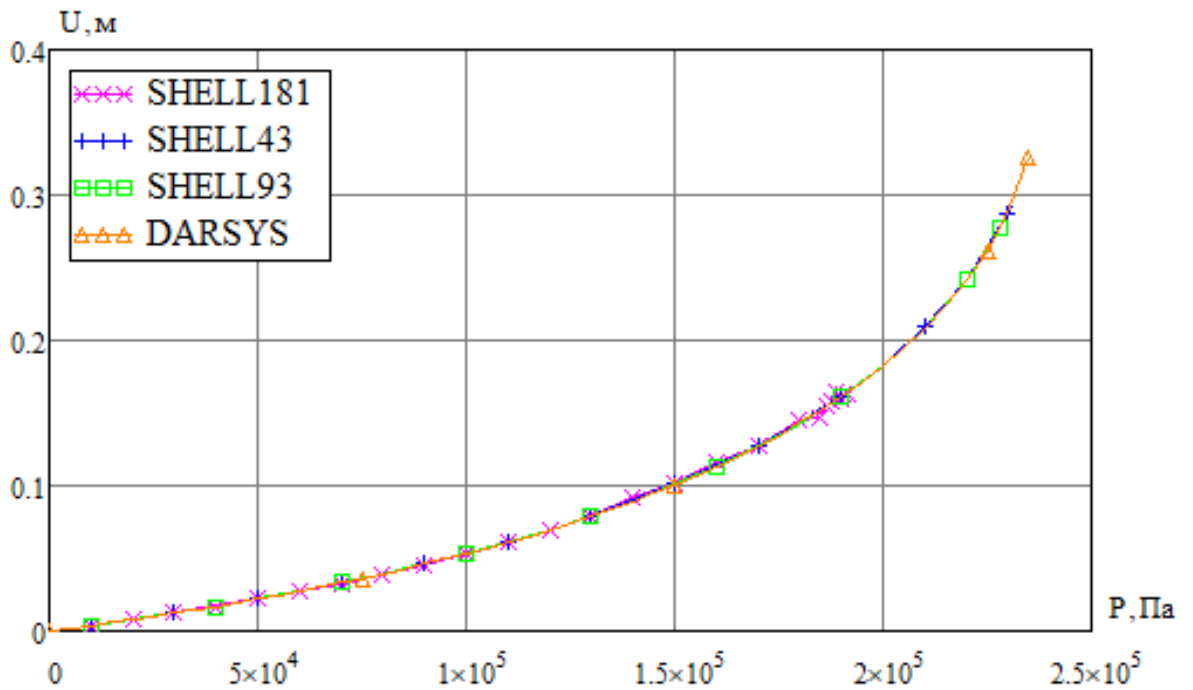


Рисунок 2.31 — Зависимость перемещения верхней точки меридиана составной оболочки от давления

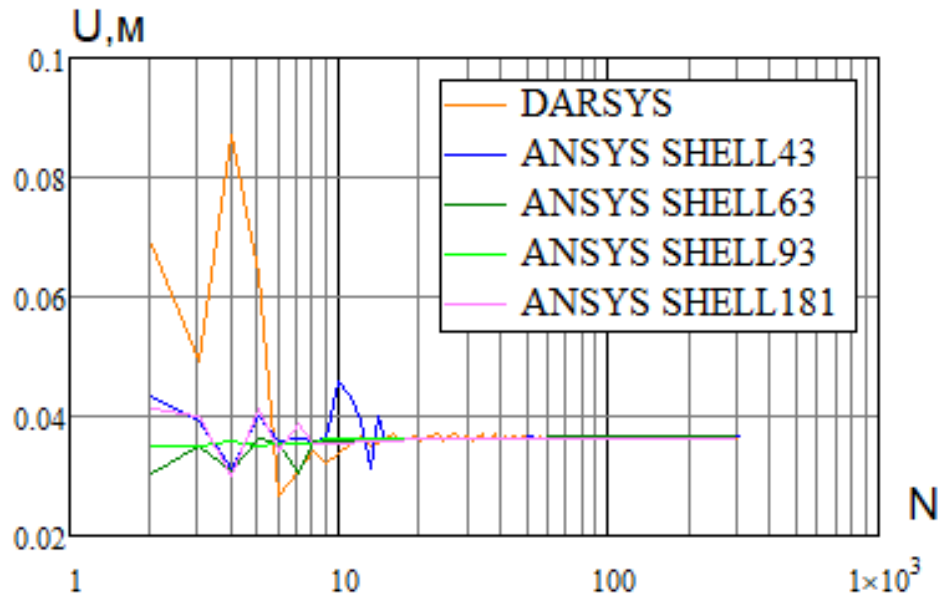


Рисунок 2.32 — Сходимость перемещения при варьировании числа разбиений в линейной постановке

Выводы по главе 2

В данной главе получены следующие основные результаты:

1. Получена разрешающая система геометрически нелинейных дифференциальных уравнений статического деформирования осесимметричной оболочки вращения на основе общих уравнений оболочки произвольной формы, записанных в глобальных координатах. Уравнения учитывают большие продольные деформации, поперечный сдвиг, изменение толщины при деформировании, произвольную геометрическую форму меридиана.

2. Разработана программа для решения тестовых задач на языке Fortran (приложение А), а также скрипт APDL (приложение Б). После тестирования, код разработанной программы частично внедрен в программный комплекс по расчёту механики стержневых и оболочечных систем DARSYS (акт внедрения приведён в приложении В), в котором реализован алгоритм численного решения нелинейных краевых задач на основе метода конечных разностей.

3. Представлены результаты решения тестовых задач раздутия оболочек цилиндрической, сферической, эллиптической, конической, а также коническо-цилиндрической составной оболочки. Работоспособность алгоритмов и достоверность получаемых по предложенным уравнениям результатов подтверждается хорошим согласованием с расчётами тестовых задач в ANSYS.

4. Результаты, приведённые в данной главе, являются основой для получения уравнений движения в следующей главе.

ГЛАВА 3 ДИНАМИКА ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

3.1 Общие уравнения движения ортотропной оболочки

Кинематические соотношения для оболочек (2.10)–(2.14), полученные в предыдущей главе, подходят для использования в случае динамического деформирования ортотропных оболочек. Различие будет присутствовать в уравнениях упругости и уравнениях равновесия (в данном случае в смысле динамического равновесия по Даламберу).

Рассмотрим динамическое равновесие элемента оболочки под действием распределённой нагрузки и моментов от внешних факторов \vec{q}, \vec{m} и инерции самой оболочки \vec{q}_u, \vec{m}_u . По граням элемента прикладываются внутренние погонные усилия и моменты, полученные в результате осреднений напряжений по толщине оболочки (рисунок 3.1).

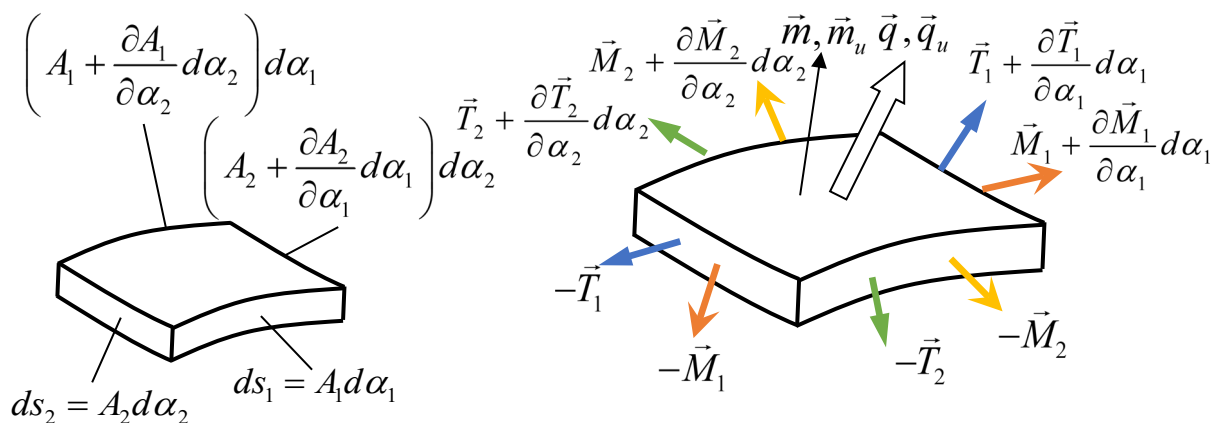


Рисунок 3.1 — Динамическое равновесие элемента оболочки

Дифференциалы параметров поверхности представим в виде $ds_1 = A_1 d\alpha_1$, $ds_2 = A_2 d\alpha_2$. В этом представлении можно считать α_1, α_2 безразмерными параметрами на поверхности.

Для деформированной оболочки имеем $ds_1^* = A_1^* d\alpha_1$, $ds_2^* = A_2^* d\alpha_2$. Уравнения динамического равновесия сил, записанные для деформированного состояния, имеют вид:

$$\frac{1}{A_1^* A_2^*} \frac{\partial(A_2^* \vec{T}_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1^* A_2^*} \frac{\partial(A_1^* \vec{T}_2)}{\partial \alpha_2} + \vec{q} = -\vec{q}_u, \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{A_1^* A_2^*} \frac{\partial(A_2^* \vec{M}_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1^* A_2^*} \frac{\partial(A_1^* \vec{M}_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1^*} \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \alpha_1} \times \vec{T}_1 + \frac{1}{A_2^*} \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \alpha_2} \times \vec{T}_2 + \vec{m} = -\vec{m}_u, \quad (3.2)$$

где \vec{q}_u — сила инерции, \vec{m}_u — инерционный момент. Здесь необходимо отметить, что инерционная сила и момент, в силу сохранения массы элементарного объёма, зависят только от ускорения, поэтому в формуле (3.1) сила инерции

$$\vec{q}_u = -\frac{\rho h \ddot{U}}{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)}, \quad (3.3)$$

а в (3.2) инерционный момент:

$$\vec{m}_u = -\frac{\rho h^3 (\ddot{\Omega}_1 \vec{e}_1^* + \ddot{\Omega}_2 \vec{e}_2^*)}{12(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)}, \quad (3.4)$$

где $\ddot{\Omega}_{1,2}$ — угловые ускорения вокруг главных осей (точки обозначают дифференцирование по времени t).

Для замыкания системы уравнений необходимо добавить связь между параметрами деформации и напряжениями, а также граничные условия. Запишем физические соотношения для ортотропного материала в плоском напряжённом состоянии [132, 134]. Принимаем, что оси ортотропии совпадают с направлениями \vec{e}_1, \vec{e}_2 . Для плоского случая независимыми являются четыре постоянные: два модуля упругости E_1, E_2 , модуль сдвига G_{12} и коэффициент Пуассона ν_{12} или ν_{21} ($\nu_{21} E_1 = \nu_{12} E_2$) [134]:

$$\text{растяжение: } N_1 = \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} (\varepsilon_1 + \nu_{21} \varepsilon_2), \quad N_2 = \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} (\varepsilon_2 + \nu_{12} \varepsilon_1), \quad (3.5)$$

$$\text{изгиб: } M_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} (\kappa_1 + \nu_{21} \kappa_2), \quad M_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} (\kappa_2 + \nu_{12} \kappa_1), \quad (3.6)$$

$$\text{сдвиг: } S = G_{12}\chi, \text{ кручение: } H = \frac{G_{12}h^3}{12}\tau, \quad (3.7)$$

где $N_1 = \vec{T}_1\vec{e}_1^*$, $N_2 = \vec{T}_2\vec{e}_2^*$ — продольные силы, $S = \vec{T}_1\vec{e}_2^* = \vec{T}_2\vec{e}_1^*$ — сдвиговое усилие, $M_1 = \vec{M}_1\vec{e}_2^*$, $M_2 = \vec{M}_2\vec{e}_1^*$ — изгибающие моменты, $H = \vec{M}_1\vec{e}_1^* = \vec{M}_2\vec{e}_2^*$ — крутящий момент, h — толщина оболочки, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — параметры продольной деформации, χ — параметр деформации сдвига, κ_1, κ_2 — параметры изменения кривизны срединной поверхности, τ — параметр деформации кручения.

3.2 Уравнения движения осесимметричной ортотропной оболочки

Вычислив производные, входящие в уравнения равновесия (3.1), (3.2) по аналогии с (2.40)–(2.43), уравнения динамического равновесия сил в проекциях на оси цилиндрической системы координат \vec{i}_r, \vec{i}_z будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d[r(1+\varepsilon_1)T_{2r}]}{d\xi} - A_2(1+\varepsilon_2)T_{1\varphi} + rA_2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)q_r &= rA_2\rho h\ddot{U}_r, \\ \frac{d[r(1+\varepsilon_1)T_{2z}]}{d\xi} + rA_2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)q_z &= rA_2\rho h\ddot{U}_z, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $\vec{q} = q_r\vec{i}_r + q_z\vec{i}_z$ — внешняя нагрузка. Уравнение равновесия в проекции на ось \vec{i}_φ удовлетворяется тождественно.

Уравнение равновесия моментов в проекции на ось \vec{i}_φ :

$$\begin{aligned} \frac{d[r(1+\varepsilon_1)M_{2\varphi}]}{d\xi} + A_2(1+\varepsilon_2)M_{1s}r_{,s} + rA_2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) \times \\ \times [T_{2r}(r_{,s}\sin\gamma + z_{,s}\cos\gamma) - T_{2z}(r_{,s}\cos\gamma - z_{,s}\sin\gamma)] &= -rA_2\frac{\rho h^3}{12}\ddot{\gamma}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Физические соотношения (3.5)–(3.7) для ортотропной осесимметричной оболочки примут следующий вид:

$$N_1 = T_{1\varphi} = \frac{E_1 h^*}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}(\hat{\varepsilon}_1 + \nu_{21}\hat{\varepsilon}_2), \quad (3.10)$$

$$N_2 = T_{2r} \begin{pmatrix} r_{,s} \cos \gamma - \\ -z_{,s} \sin \gamma \end{pmatrix} + T_{2z} \begin{pmatrix} r_{,s} \sin \gamma + \\ +z_{,s} \cos \gamma \end{pmatrix} = \frac{E_2 h^*}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} (\hat{\varepsilon}_2 + \nu_{12} \hat{\varepsilon}_1), \quad (3.11)$$

$$M_1 = M_{1s} = \frac{E_1 h^{*3}}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} (\Delta k_1 + \nu_{21} \Delta k_2), \quad (3.12)$$

$$M_2 = -M_{2\varphi} = \frac{E_2 h^{*3}}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} (\Delta k_2 + \nu_{12} \Delta k_1), \quad (3.13)$$

где h^* — толщина деформированной оболочки; $\hat{\varepsilon}_1$, $\hat{\varepsilon}_2$ — меры продольных деформаций.

Определим изменение толщины при деформировании аналогично (2.50)–(2.56). Для этого запишем закон Гука для ортотропного материала:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{21} \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{31} \frac{\sigma_3}{E_3}, \\ \hat{\varepsilon}_2 &= -\nu_{12} \frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{32} \frac{\sigma_3}{E_3}, \\ \hat{\varepsilon}_3 &= -\nu_{13} \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{23} \frac{\sigma_2}{E_2} + \frac{\sigma_3}{E_3}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

так как рассматриваются тонкие оболочки, положим $\sigma_3 = 0$, тогда

$$\hat{\varepsilon}_3 = \frac{\nu_{12} \nu_{23} + \nu_{13}}{\nu_{12} \nu_{21} - 1} \hat{\varepsilon}_1 + \frac{\nu_{21} \nu_{13} + \nu_{23}}{\nu_{12} \nu_{21} - 1} \hat{\varepsilon}_2, \quad (3.15)$$

и с учётом (2.50) в итоге имеем следующее выражение для функции изменения толщины:

$$f_h = \exp \left(\frac{\nu_{12} \nu_{23} + \nu_{13}}{\nu_{12} \nu_{21} - 1} \hat{\varepsilon}_1 + \frac{\nu_{21} \nu_{13} + \nu_{23}}{\nu_{12} \nu_{21} - 1} \hat{\varepsilon}_2 \right). \quad (3.16)$$

В практических целях важно привести уравнения к безразмерному виду. Введем в рассмотрение безразмерные величины аналогично (2.57):

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \frac{s}{\ell}, \quad \bar{h} = \frac{h}{\ell}, \quad \bar{r} = \frac{r}{\ell}, \quad \bar{z} = \frac{z}{\ell}, \\ \bar{U} &= \frac{U}{\ell}, \quad \bar{T} = \frac{(1 - \nu^2)}{E \bar{h} \ell} T, \quad \bar{M} = \frac{12(1 - \nu^2)}{E \bar{h}^2 \ell^2} M, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где ℓ — характерный геометрический размер оболочки (например: длина меридиана, радиус), $\nu = \sqrt{\nu_{12}\nu_{21}}$, $E = \sqrt{E_1E_2}$. Кроме того, перейдём к параметризации функций с помощью ξ .

Физические соотношения (3.10)–(3.13) с учётом (3.17) переписутся следующим образом:

$$\bar{T}_{1\varphi} = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} f_h(\hat{\varepsilon}_1 + \nu_{21}\hat{\varepsilon}_2), \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{\bar{s}_{,\xi}} \left[\bar{T}_{2r} (\bar{r}_{,\xi} \cos \gamma - \bar{z}_{,\xi} \sin \gamma) + \bar{T}_{2z} (\bar{r}_{,\xi} \sin \gamma + \bar{z}_{,\xi} \cos \gamma) \right] = \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} f_h(\hat{\varepsilon}_2 + \nu_{12}\hat{\varepsilon}_1), \quad (3.19)$$

$$\bar{M}_{1s} = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \bar{h} \ell f_h^3(\Delta k_1 + \nu_{21}\Delta k_2), \quad (3.20)$$

$$\bar{M}_{2\varphi} = -\sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \bar{h} \ell f_h^3(\Delta k_2 + \nu_{12}\Delta k_1), \quad (3.21)$$

из (2.59) определим меру деформации в меридиональном направлении:

$$\hat{\varepsilon}_2 = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \frac{1}{\bar{s}_{,\xi} f_h} \left[\bar{T}_{2r} (\bar{r}_{,\xi} \cos \gamma - \bar{z}_{,\xi} \sin \gamma) + \bar{T}_{2z} (\bar{r}_{,\xi} \sin \gamma + \bar{z}_{,\xi} \cos \gamma) \right] - \nu_{12}\hat{\varepsilon}_1. \quad (3.22)$$

Упростим и перепишем уравнения равновесия (3.8), (3.9) с учётом (3.17) и (2.39):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}_{2r}}{d\xi} = & - \left(\frac{r_{,\xi}}{r} + \frac{\varepsilon_{1,\xi}}{(1+\varepsilon_1)} \right) \bar{T}_{2r} + \frac{\bar{s}_{,\xi} (1+\varepsilon_2)}{\bar{r} (1+\varepsilon_1)} \bar{T}_{1\varphi} - \\ & - \bar{s}_{,\xi} (1+\varepsilon_2) \frac{(1-\nu_{12}\nu_{21})}{\bar{h}\sqrt{E_1E_2}} q_r + \frac{\bar{s}_{,\xi} \rho \ell^2 (1-\nu_{12}\nu_{21})}{\sqrt{E_1E_2} (1+\varepsilon_1)} \ddot{U}_r, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}_{2z}}{d\xi} = & - \left(\frac{r_{,\xi}}{r} + \frac{\varepsilon_{1,\xi}}{(1+\varepsilon_1)} \right) \bar{T}_{2z} - \\ & - \bar{s}_{,\xi} (1+\varepsilon_2) \frac{(1-\nu_{12}\nu_{21})}{\bar{h}\sqrt{E_1E_2}} q_z + \frac{\bar{s}_{,\xi} \rho \ell^2 (1-\nu_{12}\nu_{21})}{\sqrt{E_1E_2} (1+\varepsilon_1)} \ddot{U}_z, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{M}_{2\varphi}}{d\xi} = & - \left(\frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} + \frac{\varepsilon_{1,\xi}}{(1+\varepsilon_1)} \right) \bar{M}_{2\varphi} - \frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} \frac{(1+\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_1)} \bar{M}_{1s} - \\ & - \frac{12}{h} (1+\varepsilon_2) \left[\begin{array}{l} \bar{T}_{2r} (\bar{r}_{,\xi} \sin \gamma + \bar{z}_{,\xi} \cos \gamma) - \\ - \bar{T}_{2z} (\bar{r}_{,\xi} \cos \gamma - \bar{z}_{,\xi} \sin \gamma) \end{array} \right] - \frac{\bar{s}_{,\xi} \rho \bar{h} \ell^2 (1-\nu_{12}\nu_{21})}{\sqrt{E_1 E_2} (1+\varepsilon_1)} \ddot{\gamma}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Из физического соотношения (3.21) выразим $\gamma_{,s}$, при больших продольных деформациях и выражений для изменения кривизн (2.32), (2.33) получим:

$$\gamma_{,s} = -(1+\varepsilon_2) \sqrt{\frac{E_1}{E_2} \frac{\bar{M}_{2\varphi}}{\ell \bar{h} f_h^3}} - \nu_{12} (1+\varepsilon_2) \Delta k_1 + \varepsilon_2 (z_{,ss} r_{,s} - r_{,ss} z_{,s}), \quad (3.26)$$

где $\Delta k_1 = \frac{z_{,s} [\cos \gamma - (1+\varepsilon_1)] + r_{,s} \sin \gamma}{(1+\varepsilon_1)r}$; при малых продольных деформациях из

выражений для кривизн (2.34), получим

$$\gamma_{,s} = - \sqrt{\frac{E_1}{E_2} \frac{\bar{M}_{2\varphi}}{\ell \bar{h} f_h^3}} - \nu_{12} \Delta k_1, \quad (3.27)$$

где $\Delta k_1 = \frac{1}{r} [z_{,s} (\cos \gamma - 1) + r_{,s} \sin \gamma]$.

Таким образом, определив $\gamma_{,s}$ по формуле (3.26) или (3.27), изменение кривизны Δk_2 будет определено по формуле (2.33) или (2.34) соответственно, тогда \bar{M}_{1s} может быть определён из физического соотношения (3.20).

В итоге с учётом (3.17) и переходом к параметризации по ξ , окончательно имеем разрешающую систему шести геометрически нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно шести функций — $\bar{U}_r, \bar{U}_z, \gamma, \bar{T}_{2r}, \bar{T}_{2z}, \bar{M}_{2\varphi}$, описывающих динамическое напряжённо-деформированное состояние осесимметричной ортотропной оболочки при больших продольных деформациях, перемещениях и поворотах:

кинематические соотношения:

$$1) \frac{d\bar{U}_r}{d\xi} = (1+\varepsilon_2)(\bar{d}_r + \bar{d}_z \theta) - \bar{r}_{,\xi}, \quad 2) \frac{d\bar{U}_z}{d\xi} = (1+\varepsilon_2)(\bar{d}_z - \bar{d}_r \theta) - \bar{z}_{,\xi}, \quad (3.28)$$

уравнение упругости при больших продольных деформациях:

$$3) \frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{(1+\varepsilon_2)\bar{s}_{,\xi}}{\bar{h}f_h^3} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \bar{M}_{2\varphi} - \nu_{12}(1+\varepsilon_2)\bar{s}_{,\xi} \Delta\bar{k}_1 + \frac{\varepsilon_2}{\bar{s}_{,\xi}^2} (\bar{z}_{,\xi\xi}\bar{r}_{,\xi} - \bar{r}_{,\xi\xi}\bar{z}_{,\xi}), \quad (3.29)$$

$$\text{где } \Delta\bar{k}_1 = \frac{1}{\bar{s}_{,\xi}\bar{r}(1+\varepsilon_1)} \left(\bar{z}_{,\xi} [\cos\gamma - (1+\varepsilon_1)] + \right. \\ \left. + \bar{r}_{,\xi} \sin\gamma \right), \quad \Delta\bar{k}_2 = \frac{\gamma_{,\xi}\bar{s}_{,\xi}^2 - \varepsilon_2 (\bar{z}_{,\xi\xi}\bar{r}_{,\xi} - \bar{r}_{,\xi\xi}\bar{z}_{,\xi})}{(1+\varepsilon_2)\bar{s}_{,\xi}^3};$$

уравнение упругости при малых продольных деформациях:

$$3) \frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{\bar{s}_{,\xi}}{\bar{h}f_h^3} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \bar{M}_{2\varphi} - \nu_{12}\bar{s}_{,\xi} \Delta\bar{k}_1, \quad (3.30)$$

$$\text{где } \Delta\bar{k}_1 = \frac{1}{\bar{s}_{,\xi}\bar{r}} [\bar{z}_{,\xi} (\cos\gamma - 1) + \bar{r}_{,\xi} \sin\gamma], \quad \Delta\bar{k}_2 = \frac{\gamma_{,\xi}}{\bar{s}_{,\xi}};$$

уравнения равновесия:

$$4) \frac{d\bar{T}_{2r}}{d\xi} = -A\bar{T}_{2r} + \frac{\bar{s}_{,\xi}}{\bar{r}} B\bar{T}_{1\varphi} - C \frac{\bar{s}_{,\xi}(1+\varepsilon_2)}{\bar{h}} q_r + D\ddot{U}_r, \\ 5) \frac{d\bar{T}_{2z}}{d\xi} = -A\bar{T}_{2z} - C \frac{\bar{s}_{,\xi}(1+\varepsilon_2)}{\bar{h}} q_z + D\ddot{U}_z, \quad (3.31)$$

$$6) \frac{d\bar{M}_{2\varphi}}{d\xi} = -A\bar{M}_{2\varphi} - \frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} B\bar{M}_{1s} - \frac{12}{\bar{h}} (1+\varepsilon_2) (\bar{T}_{2r}\bar{d}_z - \bar{T}_{2z}\bar{d}_r) - D\bar{h}\ddot{\gamma}, \quad (3.32)$$

дополнительные выражения и обозначения:

$$\bar{d}_r = (\bar{r}_{,\xi} \cos\gamma - \bar{z}_{,\xi} \sin\gamma), \quad \bar{d}_z = (\bar{r}_{,\xi} \sin\gamma + \bar{z}_{,\xi} \cos\gamma), \quad \theta = \frac{\bar{d}_z\bar{T}_{2r} - \bar{d}_r\bar{T}_{2z}}{\kappa G_{23}\bar{s}_{,\xi} f_h C},$$

$$A = \left(\frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} + \frac{\varepsilon_{1,\xi}}{(1+\varepsilon_1)} \right), \quad \varepsilon_{1,\xi} = \left(\frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}^2} \bar{U}_r - \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{U}_r}{d\xi} \right), \quad B = \frac{(1+\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_1)}, \quad C = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{\sqrt{E_1 E_2}},$$

$$D = C \frac{\bar{s}_{,\xi} \rho \ell^2}{(1+\varepsilon_1)} \varepsilon_1 = \frac{1}{\bar{r}} \bar{U}_r, \quad \varepsilon_2 = \exp(\hat{\varepsilon}_2) - 1, \quad \hat{\varepsilon}_2 = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \frac{\bar{T}_{2r}\bar{d}_r + \bar{T}_{2z}\bar{d}_z}{\bar{s}_{,\xi} f_h(\hat{\varepsilon}_2)} - \nu_{12}\hat{\varepsilon}_1,$$

$$f_h(\hat{\varepsilon}_2) = \exp \left[\frac{\nu_{12}\nu_{23} + \nu_{13}}{\nu_{12}\nu_{21} - 1} \hat{\varepsilon}_1 + \frac{\nu_{21}\nu_{13} + \nu_{23}}{\nu_{12}\nu_{21} - 1} \hat{\varepsilon}_2 \right], \quad \hat{\varepsilon}_1 = \ln(1+\varepsilon_1),$$

$$\bar{T}_{1\varphi} = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} f_h(\hat{\varepsilon}_1 + \nu_{21}\hat{\varepsilon}_2), \quad \bar{M}_{1s} = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \bar{h} f_h^3 (\Delta\bar{k}_1 + \nu_{21}\Delta\bar{k}_2). \quad (3.33)$$

Линеаризуем систему уравнений (3.28)–(3.32) относительно деформаций, поворотов, перемещений, усилий и моментов, получим геометрически линейную систему уравнений движения осесимметричной оболочки:

$$\begin{aligned}
1) \quad & \frac{d\bar{U}_r}{d\xi} = \bar{r}_{,\xi} \varepsilon_2 - \bar{z}_{,\xi} \gamma + \bar{s}_{,\xi} \theta, \\
2) \quad & \frac{d\bar{U}_z}{d\xi} = \bar{z}_{,\xi} \varepsilon_2 + \bar{r}_{,\xi} \gamma - \bar{r}_{,\xi} \theta, \\
3) \quad & \frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{\bar{s}_{,\xi}}{h} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \bar{M}_{2\varphi} - \nu_{12} \frac{\bar{r}_{,\xi}}{r} \gamma, \\
4) \quad & \frac{d\bar{T}_{2r}}{d\xi} = (\nu_{12} - 1) \frac{\bar{r}_{,\xi}}{r} \bar{T}_{2r} + \nu_{12} \frac{\bar{z}_{,\xi}}{r} \bar{T}_{2z} + (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \frac{\bar{s}_{,\xi}}{r} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \varepsilon_1 - \\
& - \bar{s}_{,\xi} \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21}}{h \sqrt{E_1 E_2}} q_r + \bar{s}_{,\xi} \rho \ell^2 \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21}}{\sqrt{E_1 E_2}} \ddot{U}_r, \\
5) \quad & \frac{d\bar{T}_{2z}}{d\xi} = -\frac{\bar{r}_{,\xi}}{r} \bar{T}_{2z} - \bar{s}_{,\xi} \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21}}{h \sqrt{E_1 E_2}} q_z + \bar{s}_{,\xi} \rho \ell^2 \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21}}{\sqrt{E_1 E_2}} \ddot{U}_z, \\
6) \quad & \frac{d\bar{M}_{2\varphi}}{d\xi} = (\nu_{12} - 1) \frac{\bar{r}_{,\xi}}{r} \bar{M}_{2\varphi} - (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \frac{\bar{r}_{,\xi}^2}{r^2} \frac{h}{\bar{s}_{,\xi}} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \gamma \\
& - \frac{12}{h} (\bar{T}_{2r} \bar{z}_{,\xi} - \bar{T}_{2z} \bar{r}_{,\xi}) - \bar{s}_{,\xi} \rho \ell^2 h \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21}}{\sqrt{E_1 E_2}} \ddot{\gamma},
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\text{где } \varepsilon_1 = \frac{1}{r} \bar{U}_r, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\bar{s}_{,\xi}} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} (\bar{T}_{2r} \bar{r}_{,\xi} + \bar{T}_{2z} \bar{z}_{,\xi}) - \nu_{12} \varepsilon_1, \quad \theta = \frac{\bar{z}_{,\xi} \bar{T}_{2r} - \bar{r}_{,\xi} \bar{T}_{2z}}{\kappa G_{23} \bar{s}_{,\xi}} \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})}.$$

3.3 Методика решения задачи о малых колебаниях оболочки

Перемещения стенки бака определяются системой дифференциальных уравнений движения осесимметричной оболочки вращения (3.28)–(3.33), которые в сокращенном виде можно записать следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\xi} = \mathbf{F}(\xi, \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}), \tag{3.35}$$

где $\mathbf{X}(\xi, t) = \{U_r, U_z, \gamma, T_{2r}, T_{2z}, M_{2\varphi}\}^T$.

Рассмотрим новое равновесное состояние, близкое к состоянию (3.35), выраженное через малое отклонение:

$$\frac{d(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X})}{d\xi} = \mathbf{F}\left[\xi, (\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}), (\ddot{\mathbf{X}} + \Delta\ddot{\mathbf{X}})\right], \quad (3.36)$$

где $\Delta\mathbf{X}(\xi, t) = \{\Delta U_r, \Delta U_z, \Delta\gamma, \Delta T_{2r}, \Delta T_{2z}, \Delta M_{2\varphi}\}^T$ — малое отклонение от (3.35)

Разложим (3.36) в ряд в окрестности точки $(\mathbf{X}, \ddot{\mathbf{X}})$, оставим слагаемые, содержащие только первую степень функций-отклонений:

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\xi} + \frac{d\Delta\mathbf{X}}{d\xi} = \mathbf{F}(\xi, \mathbf{X}, \ddot{\mathbf{X}}) + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{X}}\Delta\mathbf{X} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\ddot{\mathbf{X}}}\Delta\ddot{\mathbf{X}}. \quad (3.37)$$

Вычтем равновесное состояние (3.35), получим:

$$\frac{d\Delta\mathbf{X}}{d\xi} = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{X}}\Delta\mathbf{X} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\ddot{\mathbf{X}}}\Delta\ddot{\mathbf{X}}. \quad (3.38)$$

Решение (3.38) будем разыскивать в экспоненциальном виде:

$$\Delta\mathbf{X}(\xi, t) = \Delta\mathbf{X}^A(\xi) \cdot \exp(i\omega t). \quad (3.39)$$

Поставим (3.39) в (3.38), для амплитуд сохраним прежнее обозначение без верхнего индекса «А», имеем:

$$\frac{d\Delta\mathbf{X}}{d\xi} = \left[\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{X}} - \omega^2 \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\ddot{\mathbf{X}}} \right] \Delta\mathbf{X}. \quad (3.40)$$

Для определения амплитуд-функций и частот малых колебаний к линейным дифференциальным уравнениям (3.40) необходимо добавить краевые условия в начале и конце меридиана:

$$\mathbf{G}_1(\mathbf{X}, \ddot{\mathbf{X}}) = \mathbf{0}, \mathbf{G}_2(\mathbf{X}, \ddot{\mathbf{X}}) = \mathbf{0}. \quad (3.41)$$

Задача определения $\Delta\mathbf{X}$ и ω из (3.40) и (3.41) — называется линейной краевой задачей на собственные значения. Для численного решения применим метод конечных разностей, решение будем искать в $N+1$ дискретной точки, разностная схема будет иметь следующий вид:

$$\left[\frac{\partial\mathbf{F}_i}{\partial\mathbf{X}} + \frac{2}{h_i}\mathbf{I} - \omega^2 \frac{\partial\mathbf{F}_i}{\partial\ddot{\mathbf{X}}} \right] \Delta\mathbf{X}_i + \left[\frac{\partial\mathbf{F}_{i+1}}{\partial\mathbf{X}} - \frac{2}{h_i}\mathbf{I} - \omega^2 \frac{\partial\mathbf{F}_{i+1}}{\partial\ddot{\mathbf{X}}} \right] \Delta\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{0}, \quad i = 1..N. \quad (3.42)$$

Проделав те же операции разложения в ряд, линеаризации и вычитания равновесного состояния и подстановки решения (3.39), краевые условия (3.41) примут следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{X}_1 - \omega^2 \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial \ddot{\mathbf{X}}} \Delta \mathbf{X}_1 = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{X}_{N+1} - \omega^2 \frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial \ddot{\mathbf{X}}} \Delta \mathbf{X}_{N+1} = \mathbf{0}. \quad (3.43)$$

Соотношение (3.42) с краевыми условиями (3.43) может быть представлено в следующем развёрнутом виде:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccccc} \left[\frac{\partial G_1}{\partial X} \right] & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \left[\frac{\partial F_1}{\partial X} + \frac{2I}{h_1} \right] & \left[\frac{\partial F_2}{\partial X} - \frac{2I}{h_1} \right] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \left[\frac{\partial F_2}{\partial X} + \frac{2I}{h_2} \right] & \left[\frac{\partial F_3}{\partial X} - \frac{2I}{h_2} \right] & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left[\frac{\partial F_N}{\partial X} - \frac{2I}{h_{N-1}} \right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left[\frac{\partial F_N}{\partial X} + \frac{2I}{h_N} \right] & \left[\frac{\partial F_N}{\partial X} - \frac{2I}{h_N} \right] \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \left[\frac{\partial G_2}{\partial X} \right] \end{array} \right)}_A \left\{ \begin{array}{l} \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \\ \Delta X_3 \\ \dots \\ \Delta X_{N-1} \\ \Delta X_N \\ \Delta X_{N+1} \end{array} \right\} -$$

$$-\omega^2 \underbrace{\left(\begin{array}{cccccc} \left[\frac{\partial G_1}{\partial \ddot{X}} \right] & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \left[\frac{\partial F_1}{\partial \ddot{X}} \right] & \left[\frac{\partial F_2}{\partial \ddot{X}} \right] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \left[\frac{\partial F_2}{\partial \ddot{X}} \right] & \left[\frac{\partial F_3}{\partial \ddot{X}} \right] & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left[\frac{\partial F_N}{\partial \ddot{X}} \right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left[\frac{\partial F_N}{\partial \ddot{X}} \right] & \left[\frac{\partial F_N}{\partial \ddot{X}} \right] \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \left[\frac{\partial G_2}{\partial \ddot{X}} \right] \end{array} \right)}_C \left\{ \begin{array}{l} \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \\ \Delta X_3 \\ \dots \\ \Delta X_{N-1} \\ \Delta X_N \\ \Delta X_{N+1} \end{array} \right\} = 0 \quad (3.44)$$

Проблема (3.44) может быть представлена как матричная обобщённая проблема собственных значений для узловых значений амплитуд малых колебаний:

$$(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{C})\mathbf{x} = 0, \quad (3.45)$$

где $\mathbf{x} = \{\Delta X_1, \Delta X_2, \dots, \Delta X_{N+1}\}^T$.

Для аппроксимации производной по координатам в уравнении (3.40) в DARSYS применяется шаблон центральной разности (3.42), либо интерполяционный многочлен Лагранжа по четырём точкам для повышения точности аппроксимации при малом числе разбиений меридиана.

3.4 Сопряженная задача гидроупругости

Рассмотрим расчёт малых колебаний осесимметричного бака с идеальной несжимаемой жидкостью (рисунок 3.2). Для такой модели жидкости её малые перемещения определяются потенциалом перемещений φ [26], а перемещения стенки бака при колебаниях определяются (3.45).

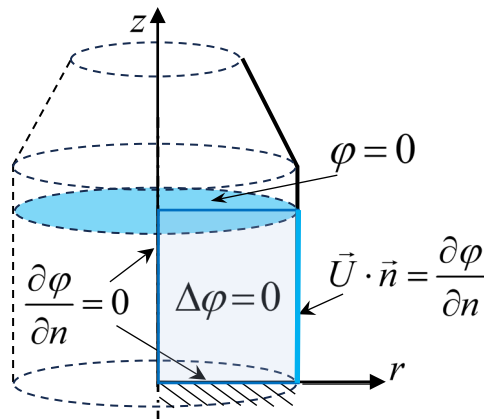


Рисунок 3.2 — Расчётная схема бака с жидкостью

В рассматриваемой задаче неизвестны перемещения оболочки и давление жидкости на её стенки. Эти функции определяются в результате решения задачи о

взаимодействии. Потенциал перемещений на смоченной стенке определяет давление жидкости на эту стенку следующим образом:

$$p = -\rho_{жс} \varphi \omega^2, \quad (3.46)$$

где $\rho_{жс}$ — плотность жидкости, ω — частота собственных колебаний.

В рамках допущений для потенциала малых перемещений жидкости φ получим краевую задачу [26]:

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{— в объёме жидкости,} \quad (3.47)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{— на свободной поверхности жидкости,} \quad (3.48)$$

$$\partial \varphi / \partial n = 0 \quad \text{— на оси симметрии и/или неподвижной части бака,} \quad (3.49)$$

$$\vec{U} \vec{n} = \partial \varphi / \partial n, \quad \vec{T}_2 \vec{n} = -\rho_{жс} \varphi \omega^2 \quad \text{— на смоченной части оболочки,} \quad (3.50)$$

где \vec{n} — внешняя нормаль.

3.5 Применение RBF-FD для построения разностной схемы краевой задачи о колебаниях жидкости

Для решения краевой задачи (3.47)–(3.50) применим метод конечных разностей, а для генерирования весовых коэффициентов разностных схем на произвольном трафарете (шаблоне) будем использовать радиальные базисные функции. В англоязычной литературе такой подход называется Radial Basis Function Finite Difference method (RBF-FD, РБФ-КР).

Радиальная функция — это любая вещественная функция, значение которой зависит только от расстояния до начала координат $\phi(\vec{r}) = \phi(\|\vec{r}\|)$ или от расстояния между некоторой другой точкой, называемой центром \vec{c} : $\phi(\vec{r}, \vec{c}) = \phi(\|\vec{r} - \vec{c}\|)$. В качестве нормы обычно выступает евклидово расстояние. Существует много видов РБФ, наиболее часто используемыми являются:

мультикватричная [114]:

$$\phi(r) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}, \quad (3.51)$$

и полигармоническая [115, 116, 133]:

$$\phi(r) = r^{2m} \ln(r), \quad (3.52)$$

где ε — параметр формы, m — степень чётной полигармонической РБФ.

Использование мультиквадратичной РБФ сопряжено необходимостью выбора параметра формы ε , зависящего от расположения узлов интерполяции. Выбор оптимального значения, минимизирующего ошибку аппроксимации, является дополнительной задачей, для решения которой в литературе предложены различные подходы [114, 135]. Полигармонические РБФ (3.52) не имеют параметра формы, однако есть некоторые умолчания их практического применения, неосвещённые или недостаточно освещённые в литературе. В данной работе используются полигармонические РБФ (3.52).

Тестовые расчёты задачи о колебаниях бака с жидкостью показали, что для использования (3.52) в качестве РБФ интерполирующего сплайна необходимо приводить нормирование размера трафарета чтобы избежать плохую обусловленность разрешающей матрицы, приводящую из-за ошибок округления чисел в ЭВМ к критическим ошибкам в определении весовых коэффициентов конечных разностей. Опытным путём было установлено, что «рабочей» областью полигармонической РБФ вида (3.52) является интервал для радиусов больше единицы. То есть необходимо нормировать координаты точек в трафарете таким образом, чтобы все расстояния между любыми точками были больше 1 (на практике можно установить число близкое к 1, например 1.01).

Классический метод конечных разностей предполагает разбиение геометрической области узлами, лежащими на координатных линиях (прямоугольная сетка). Для такого расположения узлов записываются простые и достаточно точные разностные схемы аппроксимации различных производных по координатам через узловые значения разыскиваемых функций. Использование РБФ позволяет вычислять весовые коэффициенты таких разложений на произвольной (нерегулярной) сетке, имеющей сгущение там, где это требуется (например, в области взаимодействия жидкости и оболочки), а в других местах

иметь разреженную структуру для экономии ресурсов ЭВМ. Аналогичные нерегулярности с ортогональной сеткой можно добиться, используя алгоритмы-«деревья», но они имеют дополнительные трудности в реализации.

Быстрый алгоритм генерирования нерегулярной сетки узлов в прямоугольной области предложен в [136]. Этот алгоритм был слегка модифицирован для генерирования сетки из предварительно дискретизированной выпуклой граничной области с произвольной дискретизацией. Пример результата работы этого алгоритма приведен на рисунке 3.3.

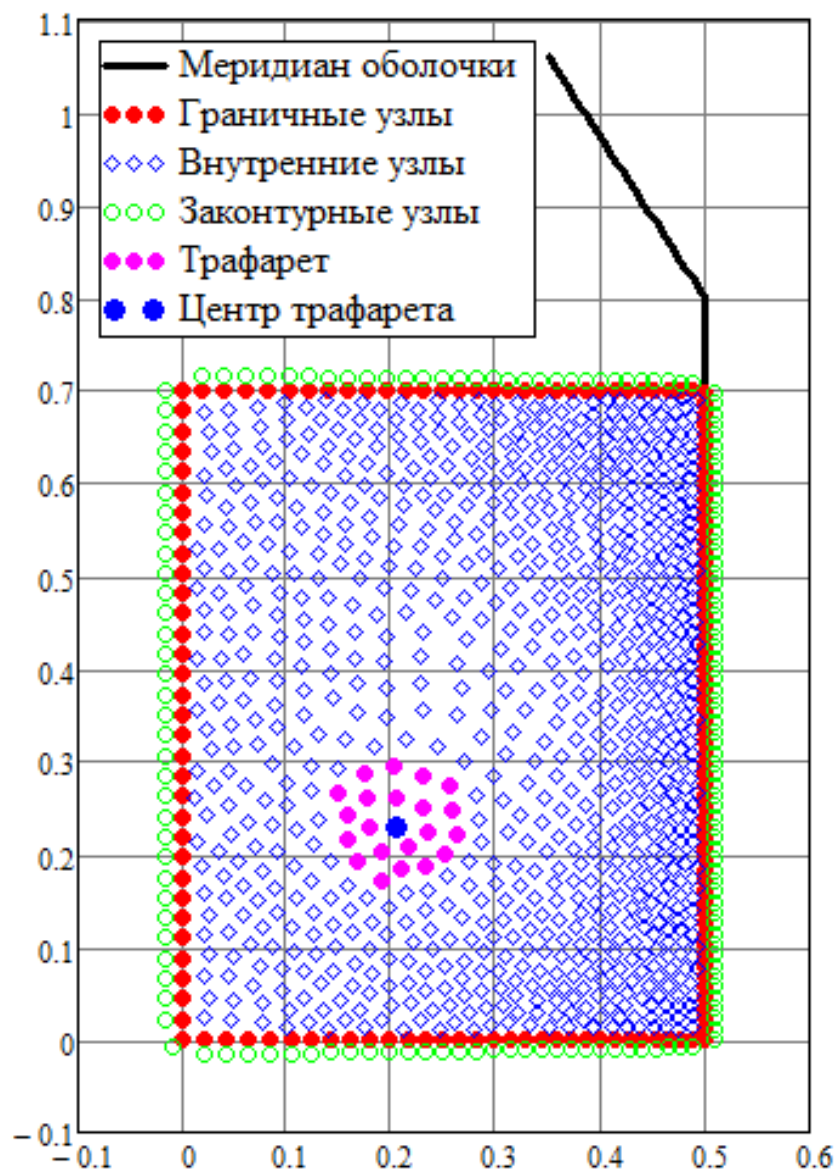


Рисунок 3.3 — Пример разбиения расчётной области узлами

На рисунке 3.3 кроме граничных и внутренних точек области показаны законтурные (вспомогательные) узлы (в англ. ghost nodes). Они вводятся для уравнивания числа уравнений и неизвестных. Таким образом, уравнение $\Delta\varphi = 0$ должно выполняться во всех узлах границы и внутренней области, а законтурные узлы участвуют в формировании трафаретов конечных разностей. Число законтурных узлов строго равно числу граничных узлов, для которых заданы граничные условия (на свободной поверхности жидкости, на оси симметрии, на смоченной части). На рисунке 3.3 приведены примеры трафаретов, составленных из 22 точек. Такие трафареты строятся для каждого узла контура внутри области, и по ним вычисляются весовые коэффициенты конечных разностной аппроксимации требуемых производных.

Рассмотрим алгоритм вычисления весовых коэффициентов для разностных схем. Интерполяционный сплайн на основе РБФ записывается в стандартном виде с дополнительным полиномом первой степени [133], гарантирующим уникальность решения [115], а также условиями ортогональности весовых коэффициентов следующим образом:

$$S(x, y) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \phi(x - x_k, y - y_k) + \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y, \quad (3.53)$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k = 0, \quad (3.54)$$

где (x_k, y_k) — узлы интерполяции, n — число узлов интерполяции, λ_k — весовые коэффициенты РБФ, $\gamma_{1,2,3}$ — коэффициенты дополнительного многочлена. Сплайн (3.53) может быть расширен до пространственного случая, а также до произвольного количества размерностей.

Пусть интерполируемая функция имеет узловые значения f_k , тогда из (3.53)–(3.54) СЛАУ для определения весовых коэффициентов будет иметь вид:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_1) & \phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) & \dots & \phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_n) & 1 & x_1 & y_1 \\ \phi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) & \phi(\vec{r}_2 - \vec{r}_2) & \dots & \phi(\vec{r}_2 - \vec{r}_n) & 1 & x_2 & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi(\vec{r}_n - \vec{r}_1) & \phi(\vec{r}_n - \vec{r}_2) & \dots & \phi(\vec{r}_n - \vec{r}_n) & 1 & x_n & y_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.55)$$

СЛАУ (3.55) имеет уникальное решение, если узлы интерполяции не повторяются (это условие обеспечивается генератором распределения узлов), а её матрица $[A]$ не меняет свой вид при аппроксимации произвольного дифференциального оператора L [133], что легко показать. Пусть необходимо найти весовые коэффициенты w_j разложения по узловым значениям функции f_j дифференциального оператора L в центральной точке x_c, y_c трафарета из n узлов:

$$\sum_{j=1}^n w_j f_j + \left[w_{n+1} \sum_{j=1}^n \lambda_j + w_{n+2} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + w_{n+3} \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \right] = L S(x, y) \Big|_{\substack{x=x_c \\ y=y_c}}, \quad (3.56)$$

здесь, в силу условия ортогональности (3.54), слагаемые в квадратных скобках равны нулю, то есть значимыми в разложении будут только n весов w_j . С учётом (3.53) и (3.55) имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^n w_j \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \phi(x_j - x_k, y_j - y_k) + \gamma_1 + \gamma_2 x_j + \gamma_3 y_j \right) + \\
 & + w_{n+1} \sum_{j=1}^n \lambda_j + w_{n+2} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + w_{n+3} \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j = L S(x, y) \Big|_{\substack{x=x_c \\ y=y_c}}, \\
 & \sum_{k=1}^n \lambda_k \sum_{j=1}^n w_j \phi(x_j - x_k, y_j - y_k) + \gamma_1 \sum_{j=1}^n w_j + \gamma_2 \sum_{j=1}^n w_j x_j + \gamma_3 \sum_{j=1}^n w_j y_j + \\
 & + w_{n+1} \sum_{k=1}^n \lambda_k + w_{n+2} \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k + w_{n+3} \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k = L S(x, y) \Big|_{\substack{x=x_c \\ y=y_c}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n \lambda_k \left(\sum_{j=1}^n w_j \phi(x_j - x_k, y_j - y_k) + w_{n+1} + w_{n+2} x_k + w_{n+3} y_k \right) + \\
& + \gamma_1 \sum_{j=1}^n w_j + \gamma_2 \sum_{j=1}^n w_j x_j + \gamma_3 \sum_{j=1}^n w_j y_j = \\
& = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k L \phi(x - x_k, y - y_k) + \gamma_1 L 1 + \gamma_2 L x + \gamma_3 L y \right) \Big|_{\substack{x=x_c \\ y=y_c}}.
\end{aligned}$$

В итоге получим СЛАУ для определения весовых коэффициентов w_j разложения дифференциального оператора по узловым значениям функции f_j , в которой матрица совпадает с (3.55):

$$[A] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \\ w_{n+1} \\ w_{n+2} \\ w_{n+3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L \phi(x - x_1, y - y_1) \\ L \phi(x - x_2, y - y_2) \\ \dots \\ L \phi(x - x_n, y - y_n) \\ L 1 \\ L x \\ L y \end{Bmatrix} \Big|_{\substack{x=x_c \\ y=y_c}}. \quad (3.57)$$

Расчётная область, занятая жидкостью, разбивалась неравномерной сеткой, имеющей сгущение на границах и разреженность внутри (рисунок 3.3, см. стр. 72). Это даёт существенную экономию размерности задачи и незначительно сказывается на точности решения. Для интерполяции характерного размера сетки узлов в направлении от границ к центру области, использовался многочлен (3.53), но в качестве РБФ использовалась функция $\phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, она более устойчива с вычислительной точки зрения, чем полигармоническая РБФ (3.52), однако не подходит для аппроксимации дифференциальных операторов задачи.

После применения МКР к уравнениям оболочки и РБФ-КР к краевой задаче для жидкости разностные схемы накладываются друг на друга соответствующим образом, а неизвестные узловые значения разрешающих функций $\mathbf{x} = \{\Delta \mathbf{X}_1, \Delta \mathbf{X}_2, \dots, \Delta \mathbf{X}_{N+1}\}^T$ и узловые значения потенциала перемещений жидкости φ

объединяются в один вектор неизвестных. Таким образом имеем следующую матричную обобщённую проблему собственных значений:

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{L} & \mathbf{\Phi} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{R} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix} = 0, \text{ или } (\bar{\mathbf{A}} - \omega^2 \bar{\mathbf{C}}) \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix} = 0, \quad (3.58)$$

где \mathbf{L} — матрица, образованная связями $\vec{U} \vec{n} = \partial \varphi / \partial n$; \mathbf{R} — матрица, образованная связями $\vec{T}_2 \vec{n} = -\rho_{ж} \varphi \omega^2$; $\mathbf{\Phi}$ — матрица, построенная на РБФ-КР аппроксимации уравнения Лапласа $\Delta \varphi = 0$, а также краевых условий $\varphi = 0$ и $\partial \varphi / \partial n$.

Полученная обобщённая проблема (3.58) решается алгоритмом Арнольди [137] с помощью пакета подпрограмм с открытым исходным кодом ARPACK в DARSYS [131]. Алгоритм решения уравнений ортотропной осесимметричной оболочки совместно с жидкостью добавлен в функциональные возможности программы DARSYS (акт внедрения приведён в приложении В).

3.6 Приведение уравнений к безразмерному виду для случая стыковки нескольких оболочек

Для моделирования связки баков, баков с промежуточным днищем, а также подкрепления шпангоутами необходимо проводить стыковку нескольких оболочек в одну конструкцию. На рисунке 3.4 приведён пример портрета матрицы $(\bar{\mathbf{A}} - \omega^2 \bar{\mathbf{C}})$ (3.58), полученной для составного бака (тороидального бака с промежуточным днищем), который имеет две полости с жидкостью. На рисунке 3.4 оболочки, из которых составлены баки пронумерованы от 1 до 10, а под номерами 11–14 обозначены оболочки, играющие роль шпангоутов.

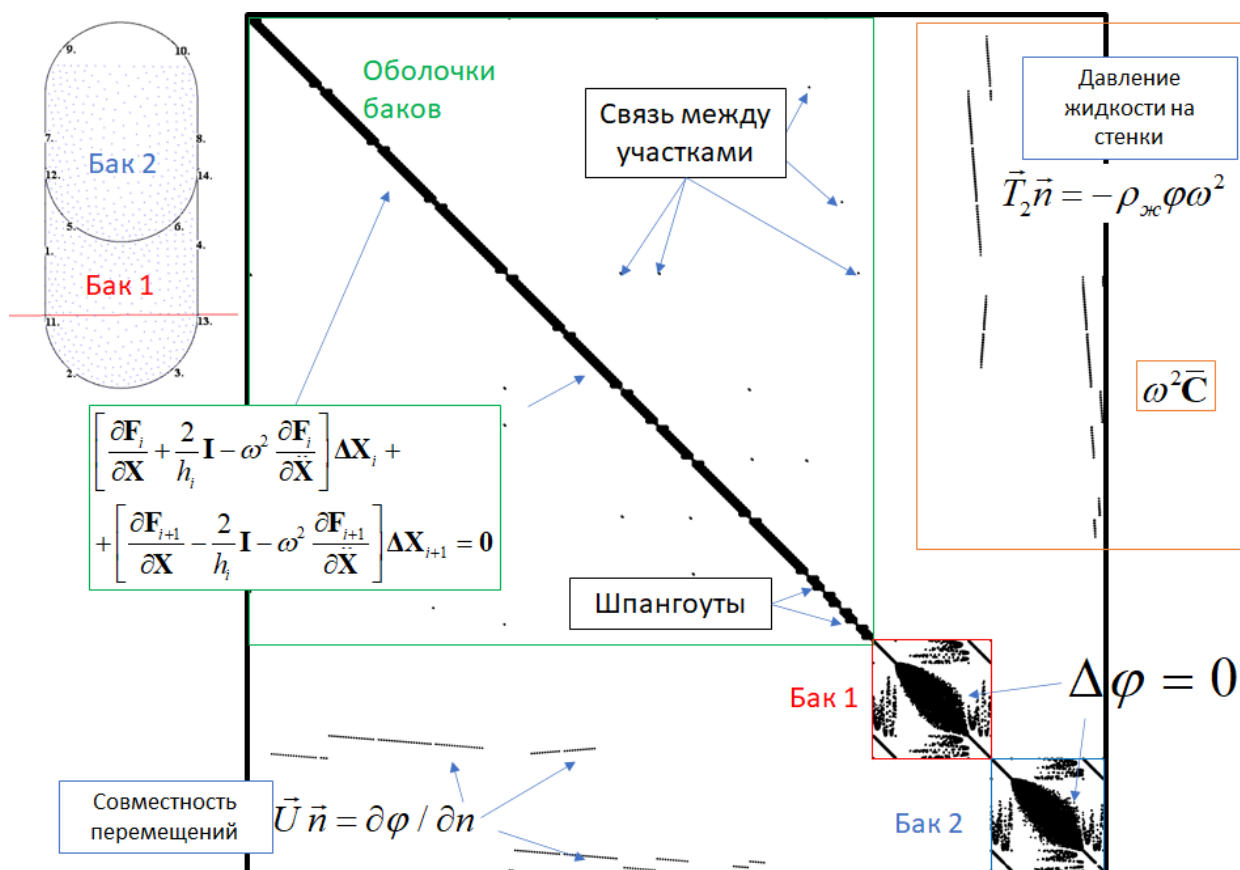


Рисунок 3.4 — Пример портрета матрицы обобщённой проблемы для связки баков

Каждая оболочка может иметь различные механические характеристики материала и толщины. Если уравнения записаны в безразмерном виде, то при стыковке оболочек разрешающие функции можно приводить в размерный вид, либо проводить обезразмеривание всех уравнений к одним и тем же величинам. Использование размерных уравнений на практике показало плохую численную устойчивость при решении сопряженных задач гидроупругости.

Рассмотрим стыковку нескольких оболочек. В этом случае необходимо производить обезразмеривание уравнений к некоторым общим для всех оболочек параметрам, чтобы обеспечить одинаковый масштаб величин при стыковке. Введем безразмерные величины следующим образом:

$$\bar{s} = \frac{s}{\ell}, \quad \bar{h} = \frac{h}{\ell}, \quad \bar{r} = \frac{r}{\ell}, \quad \bar{z} = \frac{z}{\ell}, \quad \bar{h}_0 = \frac{h_0}{\ell},$$

$$\bar{U} = \frac{U}{\ell}, \quad \bar{T} = \frac{(1-\nu_0^2)}{E_0 h_0} T, \quad \bar{M} = \frac{12(1-\nu_0^2)}{E_0 h_0^2} M, \quad (3.59)$$

где ℓ — характерный геометрический размер (например, максимальная длина меридиана или радиус из всего набора оболочек), h_0 — характерная толщина (например, максимальная из всех толщин), ν_0 — характерный коэффициент Пуассона (например, равный 0.3), E_0 — характерный модуль Юнга, который можно выбрать как максимальных из всех используемых материалов в рассматриваемой группе оболочек.

Физические соотношения (3.10)–(3.13) с учётом (3.59) перепишутся следующим образом:

$$\bar{T}_{1\varphi} = K_1 f_h (\hat{\varepsilon}_1 + \nu_{21} \hat{\varepsilon}_2), \quad (3.60)$$

$$\frac{1}{\bar{s}_{,\xi}} \left[\bar{T}_{2r} (\bar{r}_{,\xi} \cos \gamma - \bar{z}_{,\xi} \sin \gamma) + \bar{T}_{2z} (\bar{r}_{,\xi} \sin \gamma + \bar{z}_{,\xi} \cos \gamma) \right] = K_2 f_h (\hat{\varepsilon}_2 + \nu_{12} \hat{\varepsilon}_1), \quad (3.61)$$

$$\bar{M}_{1s} = K_1 \frac{h}{h_0} h f_h^3 (\Delta k_1 + \nu_{21} \Delta k_2), \quad (3.62)$$

$$\bar{M}_{2\varphi} = -K_2 \frac{h}{h_0} h f_h^3 (\Delta k_2 + \nu_{12} \Delta k_1), \quad (3.63)$$

где введены дополнительные обозначения:

$$K_0 = \frac{(1-\nu_0^2)}{E_0 h_0}, \quad K_1 = K_0 \frac{E_1 h}{(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad K_2 = K_0 \frac{E_2 h}{(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad (3.64)$$

где K_0 — общий для всех оболочек коэффициент обезразмеривания усилия, а K_1, K_2 — безразмерные относительные коэффициенты для каждой оболочки.

Определим меру деформации в меридиональном направлении:

$$\hat{\varepsilon}_2 = \frac{1}{K_2} \frac{1}{\bar{s}_{,\xi} f_h} \left[\bar{T}_{2r} (\bar{r}_{,\xi} \cos \gamma - \bar{z}_{,\xi} \sin \gamma) + \bar{T}_{2z} (\bar{r}_{,\xi} \sin \gamma + \bar{z}_{,\xi} \cos \gamma) \right] - \nu_{12} \hat{\varepsilon}_1. \quad (3.65)$$

Уравнения равновесия примут вид

$$\frac{d\bar{T}_{2r}}{d\xi} = - \left(\frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} + \frac{\varepsilon_{1,\xi}}{(1+\varepsilon_1)} \right) \bar{T}_{2r} + \frac{\bar{s}_{,\xi}}{\bar{r}} \frac{(1+\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_1)} \bar{T}_{1\varphi} - \bar{s}_{,\xi} \ell K_0 (1+\varepsilon_2) q_r + \frac{\bar{s}_{,\xi} \rho \bar{h} \ell^3}{(1+\varepsilon_1)} K_0 \ddot{U}_r,$$

$$\frac{d\bar{T}_{2z}}{d\xi} = -\left(\frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}}\bar{T}_{2z} + \frac{\varepsilon_{1,\xi}}{(1+\varepsilon_1)}\right)\bar{T}_{2z} - \bar{s}_{,\xi}\ell K_0(1+\varepsilon_2)q_z + \frac{\bar{s}_{,\xi}\rho\bar{h}\ell^3}{(1+\varepsilon_1)}K_0\ddot{U}_z, \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{M}_{2\varphi}}{d\xi} = & -\left(\frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} + \frac{\varepsilon_{1,\xi}}{(1+\varepsilon_1)}\right)\bar{M}_{2\varphi} - \frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}}\frac{(1+\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_1)}\bar{M}_{1s} - \\ & -\frac{12}{\bar{h}_0}(1+\varepsilon_2)\left[\frac{\bar{T}_{2r}(\bar{r}_{,\xi}\sin\gamma + \bar{z}_{,\xi}\cos\gamma) -}{-\bar{T}_{2z}(\bar{r}_{,\xi}\cos\gamma - \bar{z}_{,\xi}\sin\gamma)}\right] - \frac{K_0\bar{s}_{,\xi}\rho\bar{h}^3\ell^3}{\bar{h}_0(1+\varepsilon_1)}\ddot{\gamma}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Из физического соотношения (3.63) с учётом выражения (2.33) выразим $\gamma_{,s}$.

При больших продольных деформациях получим:

$$\gamma_{,s} = -\frac{(1+\varepsilon_2)\bar{h}_0}{K_2f_h^3}\frac{1}{\bar{h}}\frac{1}{\ell\bar{h}}\bar{M}_{2\varphi} - \nu_{12}(1+\varepsilon_2)\Delta k_1 + \varepsilon_2(z_{,ss}r_{,s} - r_{,ss}z_{,s}), \quad (3.68)$$

при малых продольных деформациях из (3.63) с учётом (2.34), получим

$$\gamma_{,s} = -\frac{\bar{M}_{2\varphi}}{K_2f_h^3}\frac{\bar{h}_0}{\bar{h}}\frac{1}{\ell\bar{h}} - \nu_{12}\Delta k_1. \quad (3.69)$$

В итоге имеем разрешающую систему шести геометрически нелинейных дифференциальных уравнений:

кинематические соотношения:

$$1) \frac{d\bar{U}_r}{d\xi} = (1+\varepsilon_2)(\bar{d}_r + \bar{d}_z\theta) - \bar{r}_{,\xi}, \quad 2) \frac{d\bar{U}_z}{d\xi} = (1+\varepsilon_2)(\bar{d}_z - \bar{d}_r\theta) - \bar{z}_{,\xi}, \quad (3.70)$$

уравнение упругости при больших продольных деформациях:

$$3) \frac{d\gamma}{d\xi} = -\bar{s}_{,\xi}\frac{(1+\varepsilon_2)\bar{h}_0}{K_2f_h^3}\frac{1}{\bar{h}^2}\bar{M}_{2\varphi} - \nu_{12}(1+\varepsilon_2)\bar{s}_{,\xi}\Delta\bar{k}_1 + \frac{\varepsilon_2}{\bar{s}_{,\xi}^2}(\bar{z}_{,\xi\xi}\bar{r}_{,\xi} - \bar{r}_{,\xi\xi}\bar{z}_{,\xi}), \quad (3.71)$$

$$\text{где } \Delta\bar{k}_1 = \frac{1}{\bar{s}_{,\xi}\bar{r}(1+\varepsilon_1)}\left(\frac{\bar{z}_{,\xi}[\cos\gamma - (1+\varepsilon_1)] +}{+\bar{r}_{,\xi}\sin\gamma}\right), \quad \Delta\bar{k}_2 = \frac{\gamma_{,\xi}\bar{s}_{,\xi}^2 - \varepsilon_2(\bar{z}_{,\xi\xi}\bar{r}_{,\xi} - \bar{r}_{,\xi\xi}\bar{z}_{,\xi})}{(1+\varepsilon_2)\bar{s}_{,\xi}^3};$$

уравнение упругости при малых продольных деформациях:

$$3) \frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{\bar{s}_{,\xi}}{K_2f_h^3}\frac{\bar{h}_0}{\bar{h}^2}\bar{M}_{2\varphi} - \nu_{12}\bar{s}_{,\xi}\Delta\bar{k}_1, \quad (3.72)$$

$$\text{где } \Delta\bar{k}_1 = \frac{1}{\bar{s}_{,\xi}\bar{r}}[\bar{z}_{,\xi}(\cos\gamma - 1) + \bar{r}_{,\xi}\sin\gamma], \quad \Delta\bar{k}_2 = \frac{\gamma_{,\xi}}{\bar{s}_{,\xi}};$$

уравнения динамического равновесия:

$$4) \frac{d\bar{T}_{2r}}{d\xi} = -A\bar{T}_{2r} + \frac{\bar{s}_{,\xi}}{\bar{r}} B\bar{T}_{1\varphi} - Cq_r + D\ddot{U}_r, \quad (3.73)$$

$$5) \frac{d\bar{T}_{2z}}{d\xi} = -A\bar{T}_{2z} - Cq_z + D\ddot{U}_z, \quad (3.74)$$

$$6) \frac{d\bar{M}_{2\varphi}}{d\xi} = -A\bar{M}_{2\varphi} - \frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} B\bar{M}_{1s} - \frac{12}{\bar{h}_0} (1 + \varepsilon_2) (\bar{T}_{2r}\bar{d}_z - \bar{T}_{2z}\bar{d}_r) - D\frac{\bar{h}^2}{\bar{h}_0} \ddot{\gamma}, \quad (3.75)$$

дополнительные выражения и обозначения:

$$\bar{d}_r = (\bar{r}_{,\xi} \cos \gamma - \bar{z}_{,\xi} \sin \gamma), \quad \bar{d}_z = (\bar{r}_{,\xi} \sin \gamma + \bar{z}_{,\xi} \cos \gamma), \quad \theta = \frac{\bar{d}_z \bar{T}_{2r} - \bar{d}_r \bar{T}_{2z}}{\kappa G_{23} \bar{s}_{,\xi} \bar{h} f_h K_0},$$

$$K_0 = \frac{(1 - \nu_0^2)}{E_0 h_0}, \quad K_1 = K_0 \frac{E_1 h}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad K_2 = K_0 \frac{E_2 h}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})},$$

$$A = \left(\frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} + \frac{\varepsilon_{1,\xi}}{(1 + \varepsilon_1)} \right), \quad \varepsilon_{1,\xi} = \left(\frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}^2} \bar{U}_r - \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{U}_r}{d\xi} \right), \quad B = \frac{(1 + \varepsilon_2)}{(1 + \varepsilon_1)},$$

$$C = \bar{s}_{,\xi} \ell K_0 (1 + \varepsilon_2), \quad D = \frac{\bar{s}_{,\xi} \rho \bar{h} \ell^3}{(1 + \varepsilon_1)} K_0, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{\bar{r}} \bar{U}_r, \quad \varepsilon_2 = \exp(\hat{\varepsilon}_2) - 1,$$

$$\hat{\varepsilon}_2 = \frac{\bar{T}_{2r} \bar{d}_r + \bar{T}_{2z} \bar{d}_z}{K_2 \bar{s}_{,\xi} f_h(\hat{\varepsilon}_2)} - \nu_{12} \hat{\varepsilon}_1, \quad f_h(\hat{\varepsilon}_2) = \exp \left[\frac{\nu_{12} \nu_{23} + \nu_{13}}{\nu_{12} \nu_{21} - 1} \hat{\varepsilon}_1 + \frac{\nu_{21} \nu_{13} + \nu_{23}}{\nu_{12} \nu_{21} - 1} \hat{\varepsilon}_2 \right],$$

$$\hat{\varepsilon}_1 = \ln(1 + \varepsilon_1), \quad \bar{T}_{1\varphi} = K_1 f_h(\hat{\varepsilon}_1 + \nu_{21} \hat{\varepsilon}_2), \quad \bar{M}_{1s} = K_1 \frac{\bar{h}^2}{\bar{h}_0} f_h^3(\Delta \bar{k}_1 + \nu_{21} \Delta \bar{k}_2). \quad (3.76)$$

Выводы по главе 3

В данной главе получены следующие основные результаты:

1. На основе уравнений статики, полученных в главе 2, выведены уравнения динамического нелинейного деформирования ортотропной оболочки вращения. Отличие полученных уравнений движения от уравнений статики из главы 2 в

новых уравнениях упругости и наличия слагаемых от инерционных сил и моментов в уравнениях равновесия.

2. На основе полученных уравнений путём линеаризации и вычитания исходного равновесного состояния сформулирована линейная краевая задача на собственные значения, в результате решения которой, вычисляются частоты и формы малых колебаний. Для описания малых движений идеальной несжимаемой жидкости используется потенциал перемещений, краевая задача для которого аппроксимируется конечными разностями на произвольной нерегулярной сетке узлов. Весовые коэффициенты конечных разностей вычисляются с помощью сплайн-интерполяции на основе полигармонических радиальных базисных функций. Составляется матричная обобщённая проблема собственных значений, построенная на дискретизации МКР уравнений осесимметричной оболочки и краевой задачи для жидкости, которая решается численно.

3. Для моделирования связки баков, подкреплённых шпангоутами, получен вариант уравнений с обезразмериванием к общим для набора оболочек параметрам, что позволяет производить стыковку нескольких оболочек в общую систему.

ГЛАВА 4 ТЕСТИРОВАНИЕ МЕТОДИКИ РАСЧЁТА КОЛЕБАНИЙ

4.1 Тестирование методики расчёта собственных колебаний ортотропной оболочки без жидкости

Рассмотрим тестовую задачу расчёта собственных колебаний ортотропной оболочки вращения, состоящей из закреплённой снизу цилиндрической части и свободной конической части (рисунок 3.2, см. стр. 69). Радиус цилиндра — 0.5 м , высота цилиндра — 0.8 м , длина образующей конуса — 0.3 м , угол конуса относительно вертикали — $\pi/6$, толщина стенки — 0.02 м . Для тестирования корректности разработанных уравнений рассмотрим три материала: 1) частный случай ортотропного — изотропный $E_1 = E_2$; 2) ортотропный с соотношением модулей упругости $E_1 = 2E_2$; 3) с соотношением $E_1 = 5E_2$. Для тестирования возьмем абстрактный материал, примем модуль упругости в окружном направлении $E_1 = 2 \cdot 10^7\text{ Па}$, коэффициент Пуассона $\nu_{12} = 0.3$, плотность материала $\rho = 7850\text{ кг/м}^3$. В таблицах 4.1–4.3 приведены частоты собственных колебаний, рассчитанные методом конечных элементов в программе Левина В. Е. [26], в пакете ANSYS (SHELL181) и по предложенной методике в DARSYS.

Таблица 4.1 — Расчётный случай №1. Изотропный материал $E_1 = E_2$

| Тон | Частота колебаний, Гц | | |
|-----|-----------------------|--------|--------|
| | МКЭ [26] | ANSYS | DARSYS |
| 1 | 10.488 | 10.464 | 10.463 |
| 2 | 15.345 | 15.326 | 15.324 |
| 3 | 16.538 | 16.514 | 16.510 |
| 4 | 17.613 | 17.578 | 17.575 |
| 5 | 18.337 | 18.272 | 18.258 |

Таблица 4.2 — Расчётный случай №2. Ортотропный материал $E_1 = 2E_2$

| Тон | Частота колебаний, Гц | | |
|-----|-----------------------|--------|--------|
| | МКЭ [26] | ANSYS | DARSYS |
| 1 | 7.944 | 7.951 | 7.948 |
| 2 | 14.333 | 14.314 | 14.340 |
| 3 | 16.167 | 16.120 | 16.206 |
| 4 | 16.600 | 16.518 | 16.585 |
| 5 | 16.888 | 16.982 | 17.087 |

Таблица 4.3 — Расчётный случай №3. Ортотропный материал $E_1 = 5E_2$

| Тон | Частота колебаний, Гц | | |
|-----|-----------------------|--------|--------|
| | МКЭ [26] | ANSYS | DARSYS |
| 1 | 5.197 | 5.200 | 5.198 |
| 2 | 12.091 | 12.062 | 12.072 |
| 3 | 15.955 | 16.087 | 15.967 |
| 4 | 16.205 | 16.252 | 16.192 |
| 5 | 16.356 | 16.676 | 16.417 |

Из таблиц видно, что результаты, полученные тремя способами, хорошо согласуются между собой. Это может служить основанием полагать, что разработанные уравнения колебаний ортотропной оболочки и программная реализация методики расчёта верны. Далее приведены тестовые расчёты гидроупругих колебаний.

4.2 Тестирование методики расчёта гидроупругих колебаний

4.2.1 Полусферический бак

Рассмотрим тестовую задачу из статьи [78], полусферический открытый бак (рисунок 4.1), заполнен водой, шарнирно закреплен по радиусу. Радиус $R = 5.08 \text{ м}$, толщина 0.0254 м , модуль упругости $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, плотность материала $\rho = 2770 \text{ кг / м}^3$.

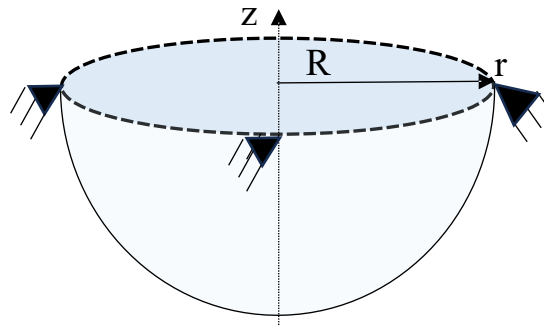


Рисунок 4.1 — Полусферический бак с водой

В таблице 4.5 приведены три низшие частоты осесимметричных гидроупругих колебаний, рассчитанные различными методами в разных программах. Три первые столбца с частотами взяты из статьи [75], в которой нет информации о сходимости в зависимости от дискретизации модели. В таблице 4.4 в четвертом столбце приведены частоты, которые практически не меняются при увеличении числа конечных и граничных элементов, при расчёте в программе Левина В.Е. [26] по МКЭ-МГЭ. В пятом столбце приведены частоты, рассчитанные в ANSYS Workbench 14.5 при ~50 разбиениях вдоль меридиана.

Таблица 4.4 — Полусферическая оболочка с водой

| Тон | Частота колебаний, Гц | | | | | |
|-----|-----------------------|----------|----------------------|--------------|---------------------------|--------|
| | МКЭ-МГЭ [70] | МКЭ [75] | ANSYS [75] (Shell63) | МКЭ-МГЭ [26] | ANSYS (Shell181, Fluid80) | DARSYS |
| 1 | 23.59 | 22.00 | 22.07 | 22.04 | 22.33 | 20.30 |
| 2 | 35.70 | 33.38 | 33.41 | 33.32 | 33.71 | 35.17 |
| 3 | 43.92 | 42.02 | 41.30 | 41.10 | 39.09 | 40.64 |

Из таблицы видно, что расхождение в первой частоте между разными методами достигает 16%. Для анализа сходимости были проведены расчёты с разной дискретизацией модели. На рисунке 4.2 приведены графики сходимости рассчитанных частот в ANSYS и по разработанной методике. Из рисунка видно, что графики пересекаются с ростом числа разбиений. Сходимости частот в ANSYS Workbench 14.5 (Shell181+Fluid80) получить не удалось, а частоты, рассчитанные по предлагаемой методике, имеют выраженную асимптотику при увеличении

числа разбиений меридиана. На этом основании можно сделать предположение, что расчёт по предлагаемой методике более точен.

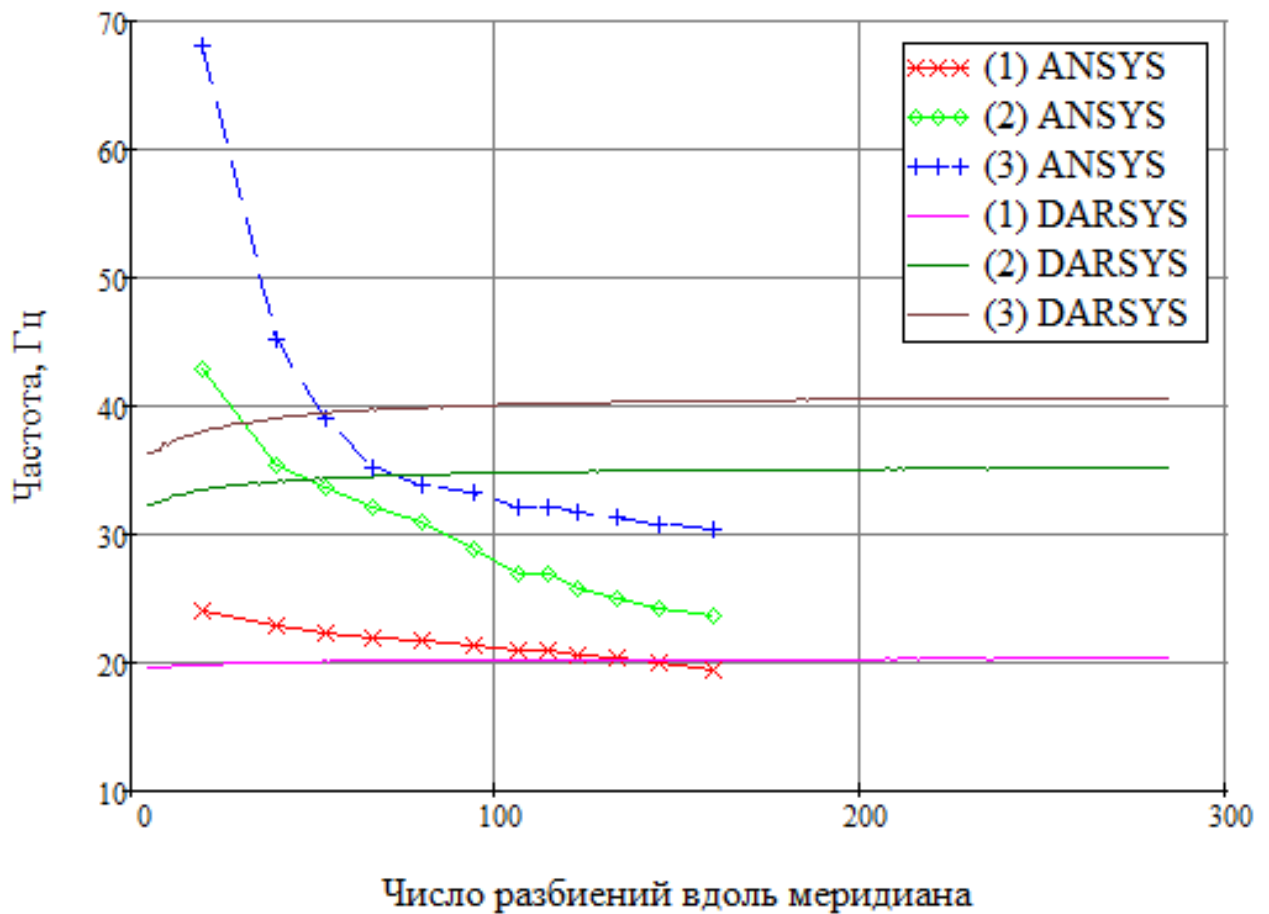


Рисунок 4.2 — Сходимость частот гидроупругих колебаний полусферической оболочки с водой

На рисунке 4.3 и 4.4 приведены зависимости низшей частоты от дискретизации меридиана для различных размеров трафарета конечных разностей $n = 15, 22, 50$ для степеней чётных полигармонических РБФ $m = 1$ и $m = 2$ соответственно. Из рисунков видно, что область разброса вычисляемых частот при изменении дискретизации меньше для $m = 2$. На рисунке 4.5 приведены примеры распределения узлов, в которых средний размер дискретизации границы увеличивается в 2 раза при приближении к оси симметрии и в 4 раза в «центре тяжести». Такая неравномерность позволяет экономить ресурсы компьютера без существенной потери точности расчёта частот и форм гидроупругих колебаний.

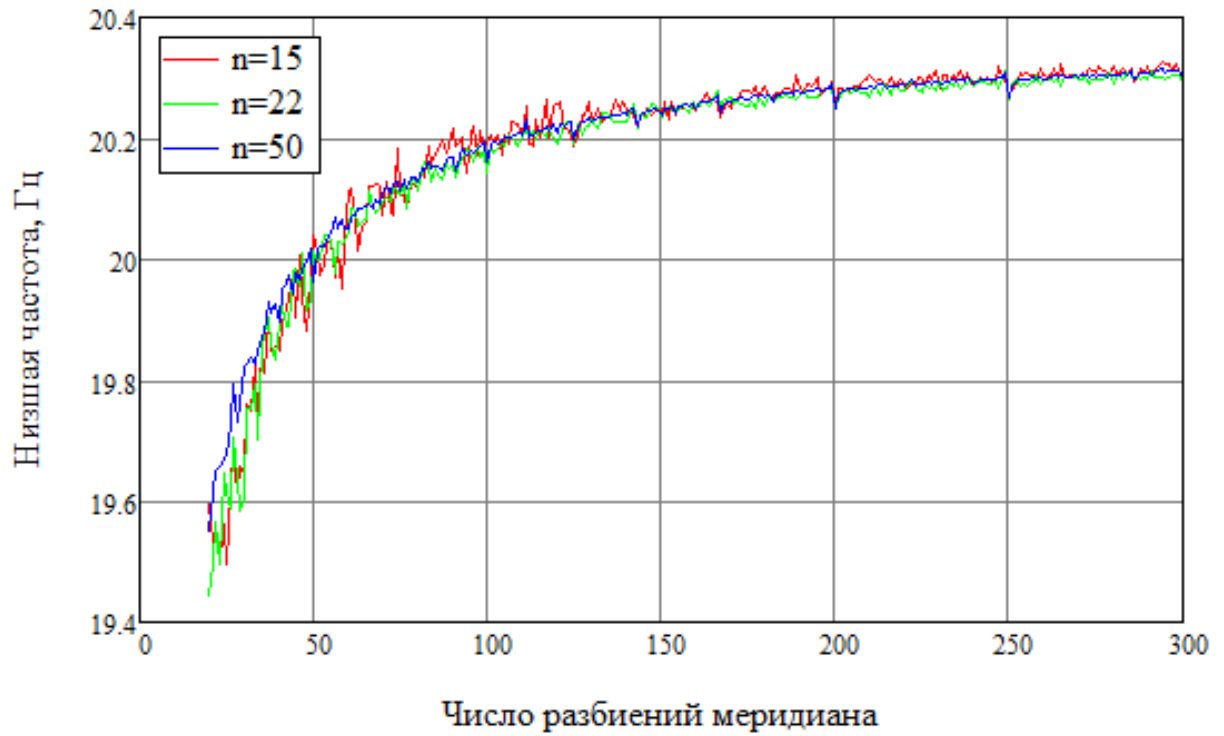


Рисунок 4.3 — Низшая частота в зависимости от дискретизации меридиана и числа точек в трафарете n , степень РБФ $m=1$

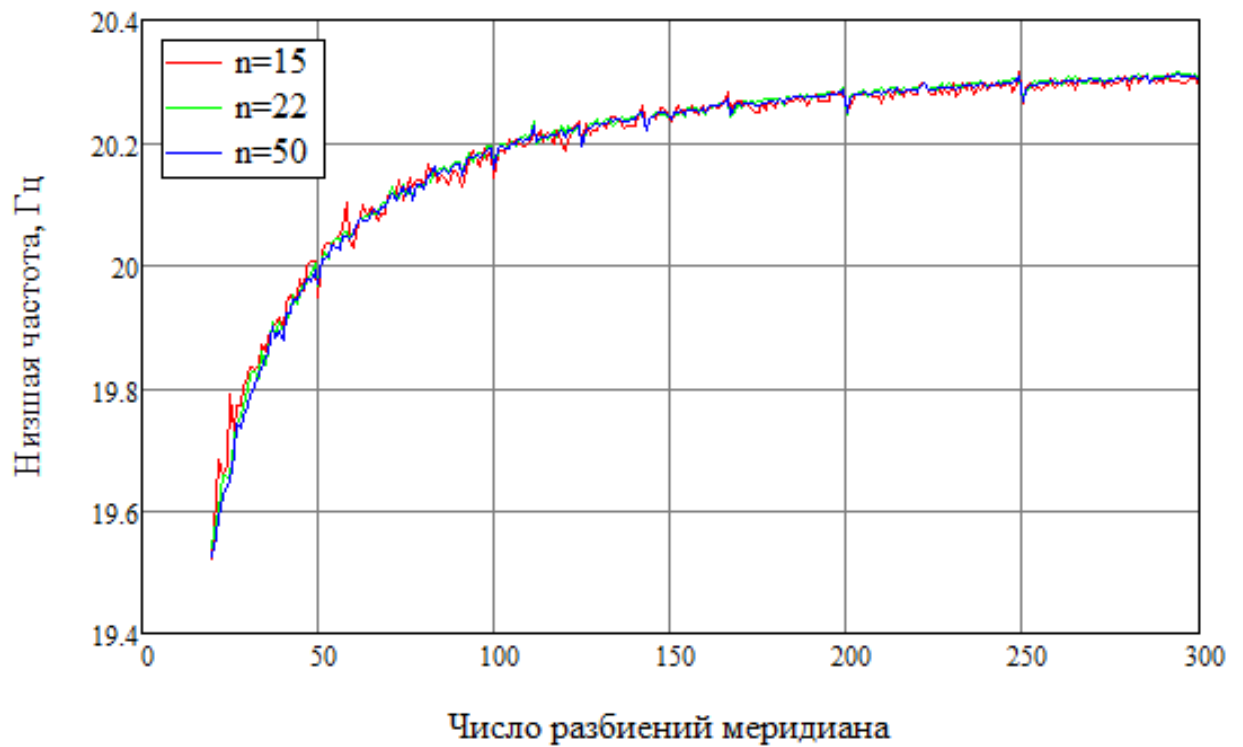


Рисунок 4.4 — Низшая частота в зависимости от дискретизации меридиана и числа точек в трафарете n (степень РБФ $m=2$)

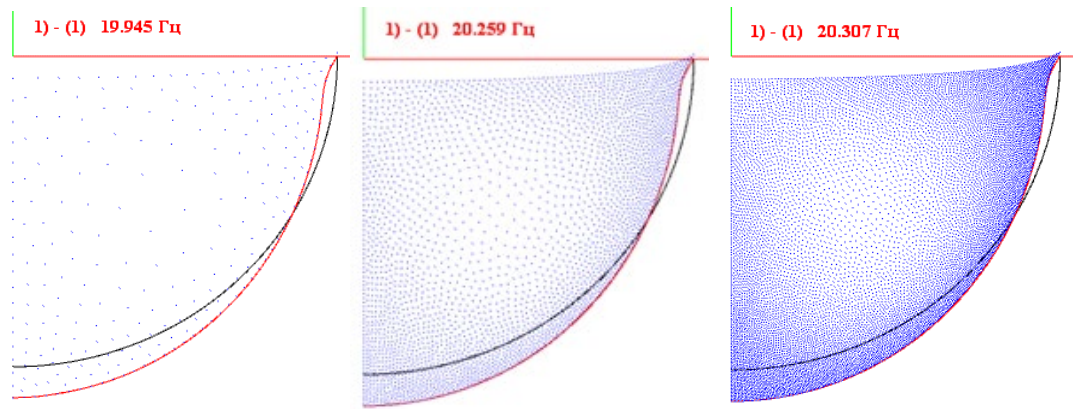


Рисунок 4.5 — Первая форма колебаний с различной дискретизацией

4.2.2 Составная оболочка с жидкостью

В таблице 4.5 приведены частоты собственных колебаний составной оболочки из изотропного материала (из первой тестовой задачи), заполненной водой до уровня 0.5м. Были проведены расчёты частот собственных осесимметричных колебаний в программе [26] по МКЭ-МГЭ (~60 элементов), в ANSYS Workbench 14.5 моделировалась четверть модели с условиями симметрии (~119 тыс. элементов) и по предложенной методике в программе DARSYS (300 разбиений меридиана), результаты сведены в таблицу 4.5.

Таблица 4.5 — Составная оболочка с водой

| Тон | Частота колебаний, Гц | | |
|-----|------------------------------|--------------|--------|
| | ANSYS (Shell181, Fluid80) | МКЭ-МГЭ [26] | DARSYS |
| 1 | 8.464 | 9.233 | 9.394 |
| 2 | 10.969 | 11.256 | 11.307 |
| 3 | 13.801 | 14.137 | 14.130 |
| 4 | 16.377 | 16.474 | 16.448 |
| 5 | 16.763 | 16.937 | 16.869 |
| 6 | 18.487 | 18.756 | 18.577 |

Из таблицы видно, что наибольшее различие приходится на низшую частоту и достигает 11%, с ростом номера тона разница падает до 0.5%. Уточнить результаты в ANSYS путём увеличения числа КЭ не удалось.

В работе [80] приводится сравнение частот, рассчитанных разными методами, и отмечается, что результаты хорошо согласуются с конечно-элементными решениями, но наиболее существенное расхождение имеет место в области низших гармоник. Причина этих расхождений не выявлена [80].

4.2.3 Цилиндрический бак

Рассмотрим задачу из [74]: цилиндрический бак радиусом $R=7.25\text{м}$, высотой $H=12.6\text{м}$, наполнен водой до уровня 11.49м (рисунок 4.6). Толщина стенки бака — 7мм, материал $E = 2 \cdot 10^{11} \text{Па}$, коэффициент Пуассона — 0.3, плотность $7850 \text{кг} / \text{м}^3$. В таблице 4.6 приведены частоты осесимметричных колебаний в ANSYS Workbench 14.5, в программе [26] и по разработанной методике. Низшая частота, полученная в ANSYS, отличается на 32%, однако с ростом номера это различие уменьшается до 8% на 5 тоне. При этом частоты, полученные по МКЭ-МГЭ [26] и предлагаемой методике хорошо согласуются между собой.

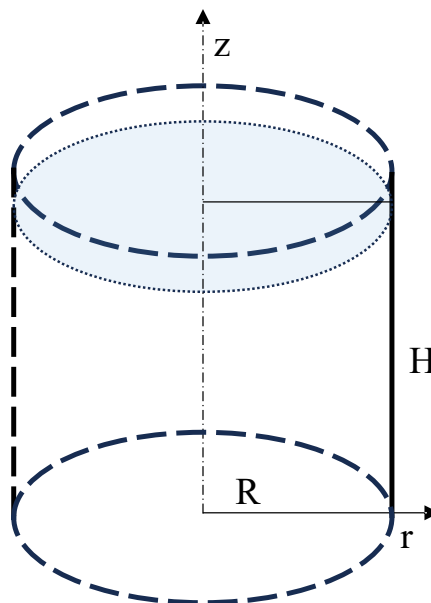


Рисунок 4.6 — Цилиндрический бак с водой

Таблица 4.6 — Цилиндрический бак с водой

| Тон | Частота колебаний, Гц | | |
|-----|------------------------------|--------------|--------|
| | ANSYS (Shell181, Fluid80) | МКЭ-МГЭ [26] | DARSYS |
| 1 | 6.410 | 8.414 | 8.441 |
| 2 | 14.696 | 15.751 | 16.484 |
| 3 | 19.503 | 20.700 | 21.026 |
| 4 | 22.966 | 24.567 | 24.547 |
| 5 | 25.680 | 27.834 | 27.485 |

Существенное отличие от частот из ANSYS и близость к частотам МКЭ-МГЭ [26] в этом и предыдущих примерах может быть обусловлено постановкой задачи безвихревого (потенциального) течения жидкости, используемой в DARSYS и [26].

4.2.4 Тороидальный бак

Тороидальный бак наполовину заполнен водой (рисунок 4.7), образующая окружность имеет радиус $R=0.5\text{м}$, внутренний радиус $R_I=0.5\text{м}$, внешний — $R_O=1.5\text{м}$. Толщина оболочки 0.02м , изотропный материал: модуль упругости $E=2 \cdot 10^7 \text{Па}$, коэффициент Пуассона $\nu=0.3$, плотность $\rho=7850\text{кг}/\text{м}^3$. Тор шарнирно закреплен по внешнему радиусу. На рисунке 4.8 приведены частоты и формы колебаний, рассчитанные в программе [26] (140 КЭ, 140 ГЭ вдоль меридиана) и по предлагаемой методике в программе DARSYS (140 разбиений меридиана, $m=2$, $n=22$). В таблице 4.7 приведено сравнение первых шести частот осесимметричных колебаний. Из таблицы видно, что частоты близки.

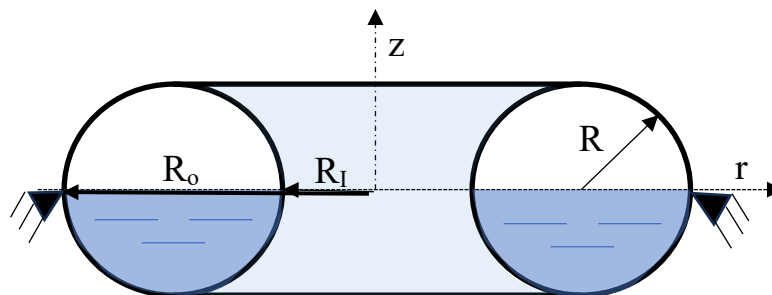


Рисунок 4.7 — Тороидальный бак с водой

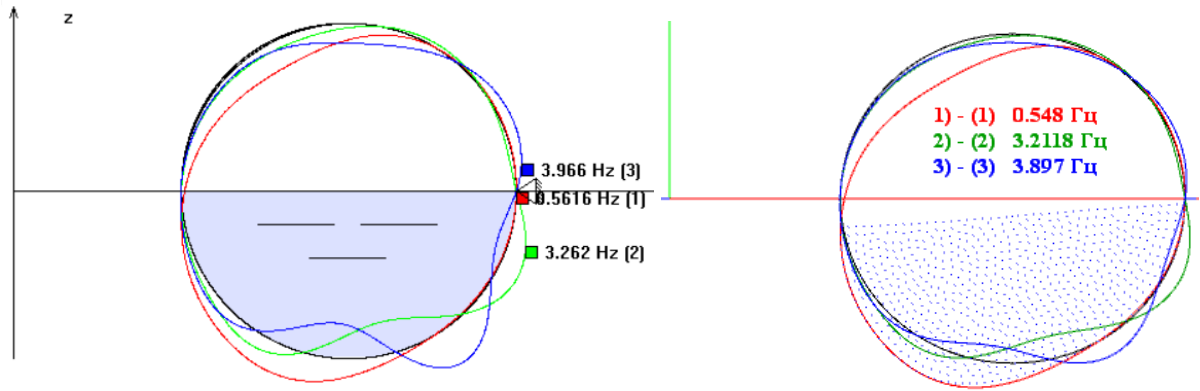


Рисунок 4.8 — Формы трёх низших тонов осесимметричных колебаний тора (МКЭ-МГЭ [26] слева, DARSYS справа)

Таблица 4.7 — Тороидальный бак с водой

| Тон | Частота колебаний, Гц | | |
|-----|-----------------------|--------|------------|
| | МКЭ-МГЭ [26] | DARSYS | Разница, % |
| 1 | 0.5616 | 0.5480 | 2.42 |
| 2 | 3.2617 | 3.2118 | 1.53 |
| 3 | 3.9653 | 3.8970 | 1.72 |
| 4 | 4.4991 | 4.4930 | 0.14 |
| 5 | 5.2194 | 5.1741 | 0.87 |
| 6 | 6.0651 | 5.9365 | 2.12 |

На рисунке 4.9 приведены зависимости трёх низших частот от числа разбиений меридиана, рассчитанные в DARSYS. Из рисунка видно, что частоты стремятся к горизонтальным прямым с ростом числа разбиений без заметных осцилляций.

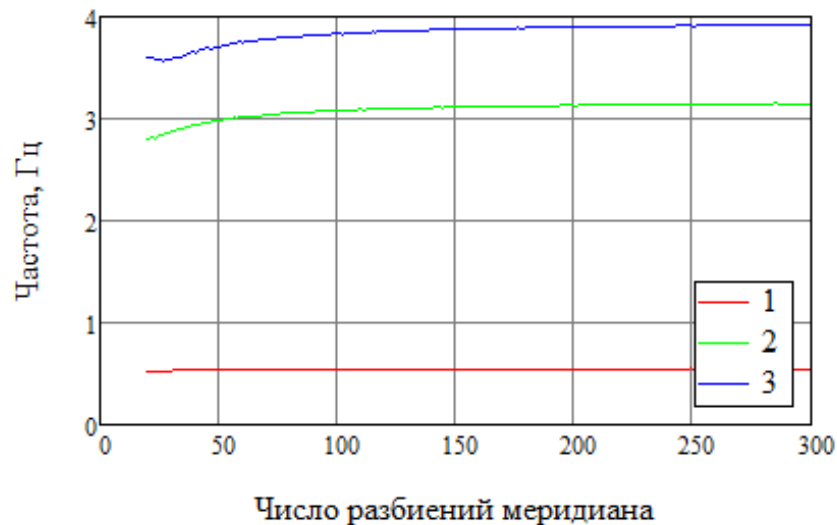


Рисунок 4.9 — Зависимости низших частот тора от дискретизации

4.3 Тестовые расчёты гидроупругих колебаний связок баков

4.3.1 Связка цилиндрических баков с полусферическим дном

Рассмотрим тестовый расчёт связки двух цилиндрических баков с полусферическим дном с различным наполнением водой (рисунок 4.10): а) пустые баки, б) уровень 1м, в) уровень 2м, г) уровень 3.5м. Радиус полусферы и цилиндра — 1м, высота цилиндрических частей — 3м. Бак составлен из четырёх участков, пронумерованных на рисунке красными цифрами. Толщина оболочек — 5мм, материал изотропный: модуль упругости $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, коэффициент Пуассона — 0.3, плотность — 2700 кг/м^3 .

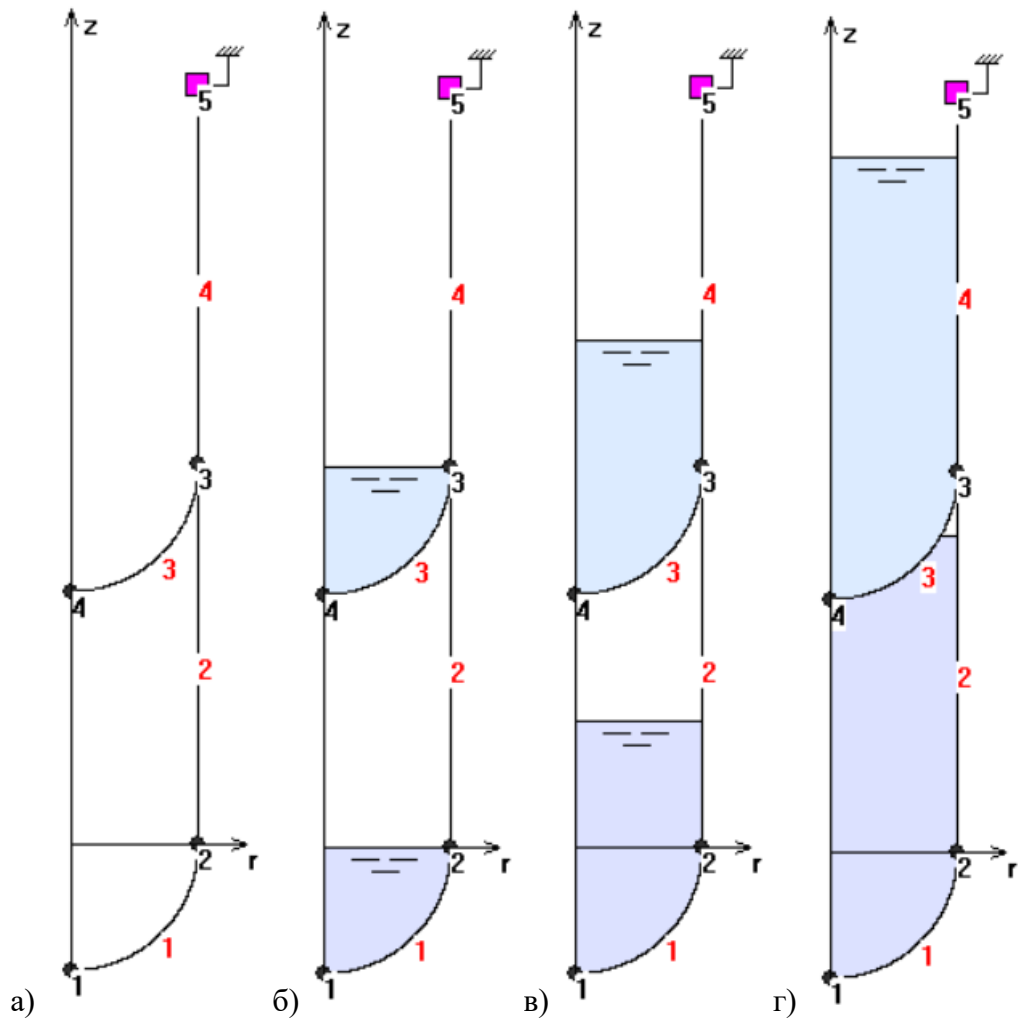


Рисунок 4.10 — Различные заливки связки цилиндрических баков

В таблицах 4.8–4.11 приведены частоты, рассчитанные по МКЭ-МГЭ в программе Левина В.Е. [26] и в DARSYS для случаев а)–г). Из таблицы видно, что результаты хорошо согласуются, когда жидкости нет, а при больших уровнях заливки наличию появляются существенные расхождения, которые для отдельных тонов колебаний достигают 15%, но в среднем отличие варьируется в пределах 5%.

Таблица 4.8 — Связка цилиндрических баков без жидкости

| Тон | Частота колебаний, Гц | | |
|-----|-----------------------|---------|------------|
| | МКЭ-МГЭ [26] | DARSYS | Разница, % |
| 1 | 170.961 | 170.960 | 0.00 |
| 2 | 446.718 | 446.630 | 0.02 |
| 3 | 623.801 | 623.640 | 0.03 |
| 4 | 667.337 | 667.250 | 0.01 |
| 5 | 747.763 | 743.870 | 0.52 |
| 6 | 760.471 | 751.020 | 1.24 |
| 7 | 796.193 | 771.270 | 3.13 |
| 8 | 805.078 | 782.810 | 2.77 |
| 9 | 809.174 | 787.460 | 2.68 |
| 10 | 809.486 | 794.470 | 1.86 |

Таблица 4.9 — Связка цилиндрических баков с уровнем воды 1 м

| Тон | Частота колебаний, Гц | | |
|-----|-----------------------|---------|------------|
| | МКЭ-МГЭ [26] | DARSYS | Разница, % |
| 1 | 50.460 | 49.526 | 1.85 |
| 2 | 91.956 | 86.694 | 5.72 |
| 3 | 151.120 | 149.120 | 1.32 |
| 4 | 159.142 | 163.170 | -2.53 |
| 5 | 199.372 | 192.910 | 3.24 |
| 6 | 203.203 | 196.140 | 3.48 |
| 7 | 236.145 | 225.770 | 4.39 |
| 8 | 238.559 | 229.370 | 3.85 |
| 9 | 267.485 | 252.960 | 5.43 |
| 10 | 269.312 | 254.480 | 5.51 |

Таблица 4.10 — Связка цилиндрических баков с уровнем воды 2м

| Тон | Частота колебаний, Гц | | |
|-----|-----------------------|---------|------------|
| | МКЭ-МГЭ [26] | DARSYS | Разница, % |
| 1 | 33.630 | 33.596 | 0.10 |
| 2 | 61.463 | 63.618 | -3.51 |
| 3 | 101.022 | 116.020 | -14.85 |
| 4 | 105.795 | 118.810 | -12.30 |
| 5 | 149.240 | 150.540 | -0.87 |
| 6 | 152.470 | 158.710 | -4.09 |
| 7 | 180.986 | 180.030 | 0.53 |
| 8 | 183.167 | 181.440 | 0.94 |
| 9 | 207.500 | 204.280 | 1.55 |
| 10 | 209.476 | 205.880 | 1.72 |

Таблица 4.11 — Связка цилиндрических баков с уровнем воды 3.5м

| Тон | Частота колебаний, Гц | | |
|-----|-----------------------|---------|------------|
| | МКЭ-МГЭ [26] | DARSYS | Разница, % |
| 1 | 23.947 | 22.885 | 4.43 |
| 2 | 35.548 | 33.027 | 7.09 |
| 3 | 63.231 | 60.498 | 4.32 |
| 4 | 78.945 | 86.996 | -10.20 |
| 5 | 107.811 | 112.760 | -4.59 |
| 6 | 110.336 | 116.800 | -5.86 |
| 7 | 137.627 | 129.560 | 5.86 |
| 8 | 139.315 | 142.970 | -2.62 |
| 9 | 159.800 | 153.700 | 3.82 |
| 10 | 161.852 | 160.510 | 0.83 |

По данным из таблиц 4.8–4.11 построены графики и приведены на рисунке 4.11. Отличие между частотами, рассчитанными по МКЭ-МГЭ [26] и по разработанной методике в DARSYS, показано по абсолютному значению в процентах.

На рисунках 4.12–4.15 приведены формы трёх низших тонов колебаний, полученных по МКЭ-МГЭ [26] и в DARSYS для разных уровней заполнения.

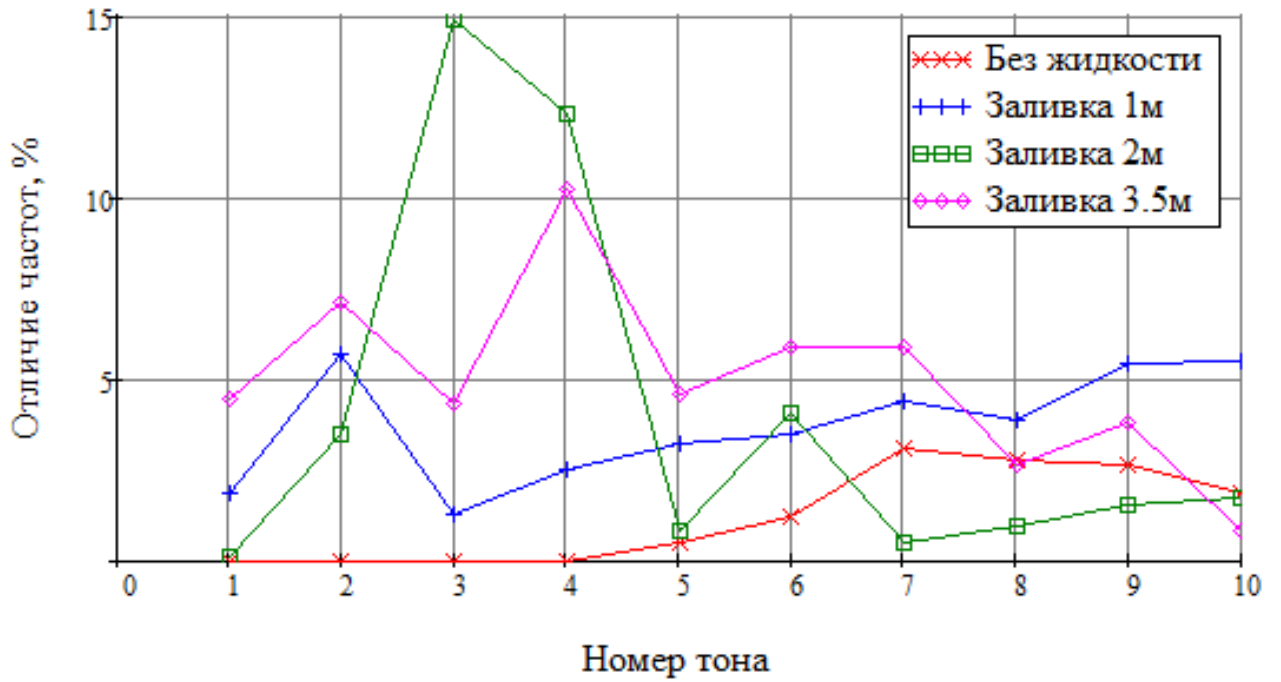


Рисунок 4.11 — Отличие частот связки цилиндрических баков с полусферическим дном, рассчитанных по МКЭ-МГЭ и DARSYS для разных уровней заливки

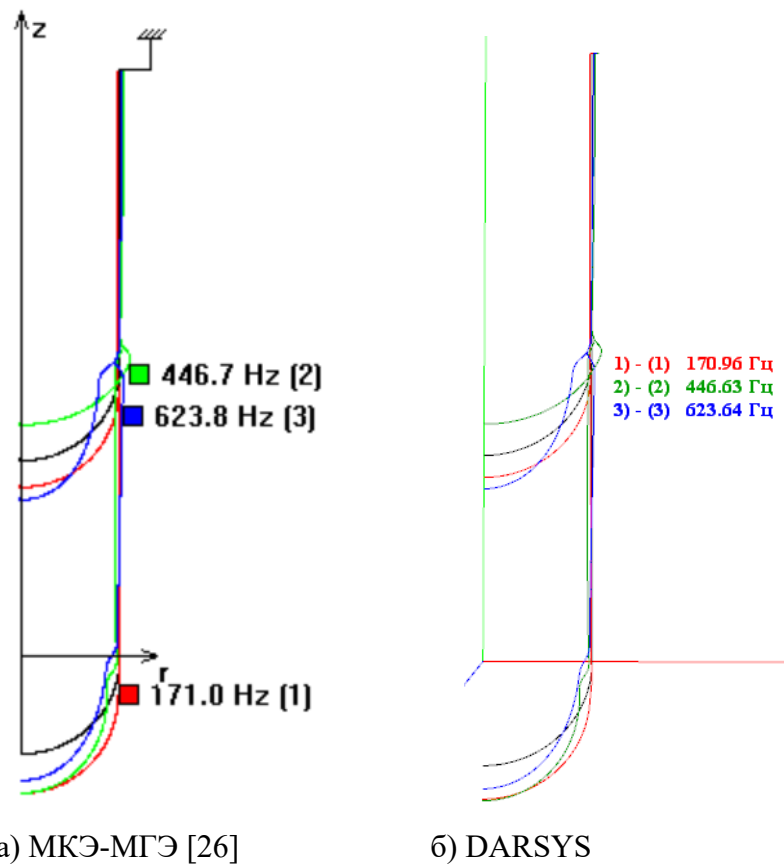


Рисунок 4.12 — Формы колебаний связки цилиндрических баков без жидкости

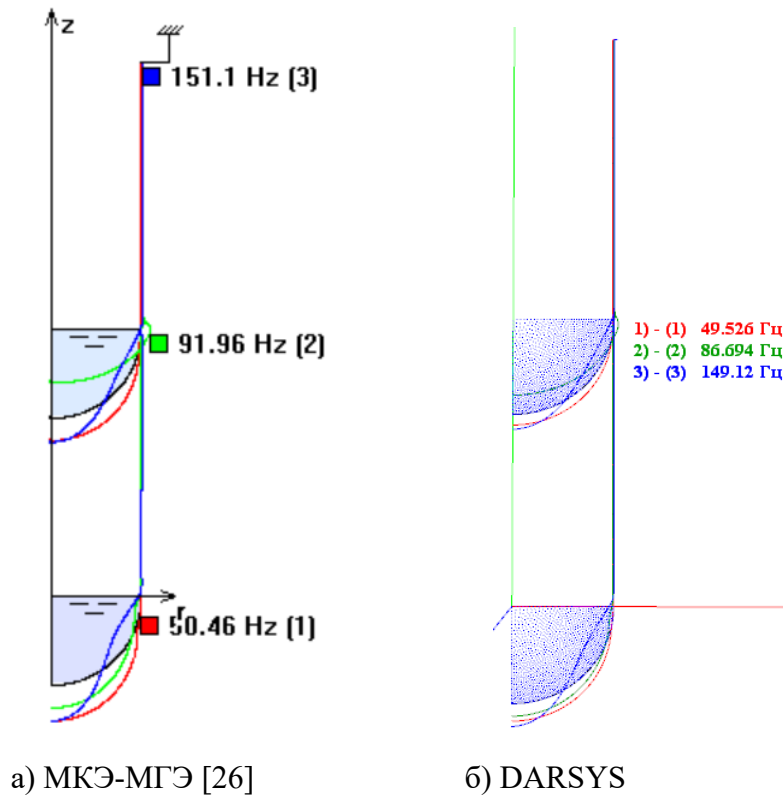


Рисунок 4.13 — Формы колебаний связки цилиндрических баков с уровнем воды 1 м

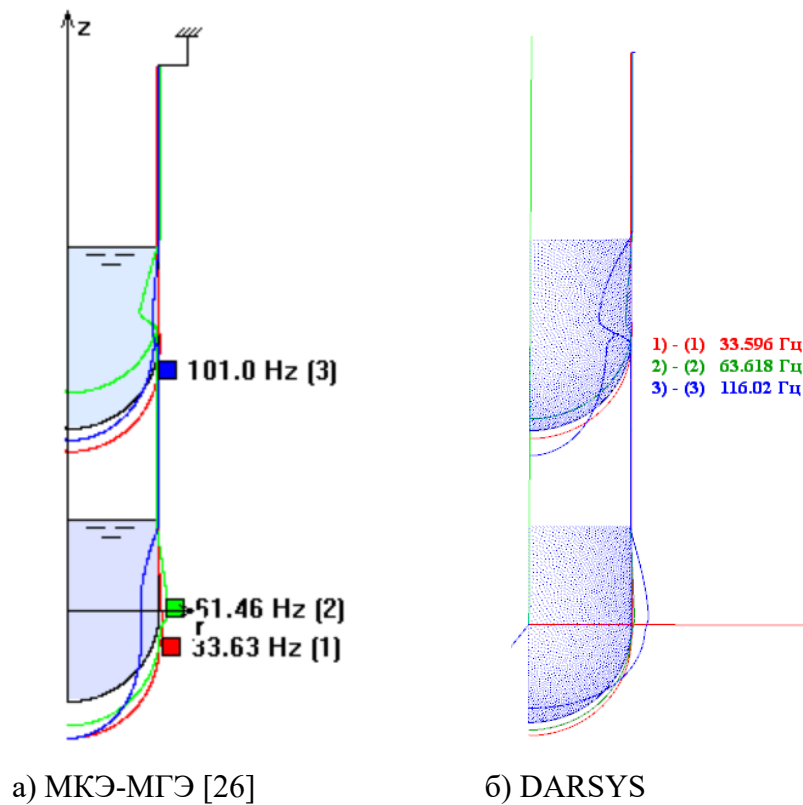


Рисунок 4.14 — Формы колебаний связки цилиндрических баков с уровнем воды 2 м

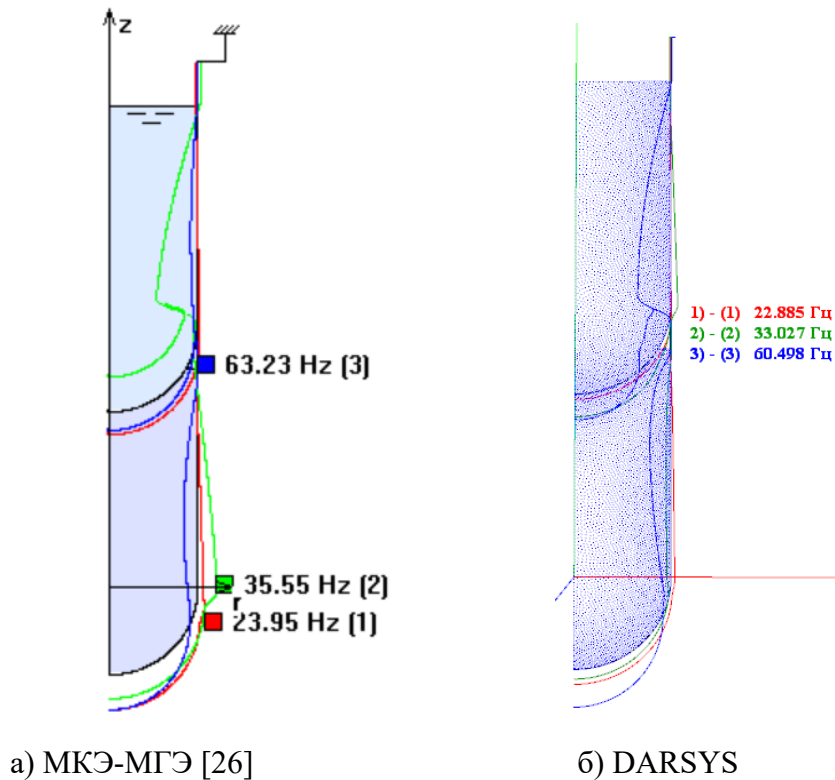


Рисунок 4.15 — Формы колебаний связки цилиндрических баков с уровнем воды 3.5м

Для расчётных случаев а)–б) имеется отличное соответствие как частот, так и форм. Наибольшее визуальное различие имеет вторая форма колебаний для расчётных случаев в)–г), объяснить это можно только кардинальным различием используемых подходов к расчёту и разным числом степеней свободы задачи.

4.3.2 Тороидальный бак с промежуточным днищем

Рассмотрим другой пример. Тороидальный бак имеет сферическое промежуточное днище, скриншот из программы-интерфейса с обозначениями узлов, закреплений и участков приведён на рисунке 4.16. Внутренний радиус тора — 1м, внешний радиус — 2м, длина цилиндрической части — 1м, радиусы полусфер — 0.5м. Схожую конструкцию имеет внешняя связка топливного бака и бака с окислителем разгонного блока Бриз-М. Для тестовых расчётов приняты следующие характеристики: толщина оболочек — 1см, материал изотропный:

модуль упругости $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, коэффициент Пуассона — 0.3, плотность — 2750 кг/м^3 . Плотность жидкости в нижнем баке — 761.46 кг/м^3 , в верхнем — 1422 кг/м^3 . Шпангоуты выполнены из того же материала, что и остальные оболочки, установлены в узлах 1–5 (рисунок 4.16) и имеют площадь поперечного сечения 0.001 м^2 , выполняют функцию крепления только в вертикальном направлении. Рассмотрим несколько случаев заливки от нижней точки баков:

а) пустые баки, б) уровень 0.8м, в) уровень 1.05м, г) уровень 1.2м.

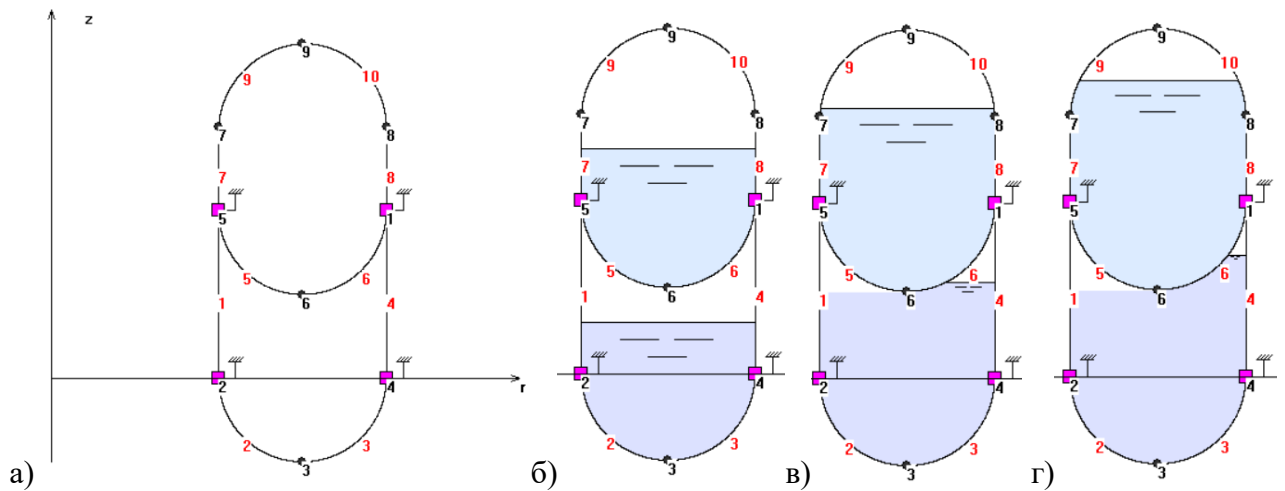


Рисунок 4.16 — Расчётная схема тороидального бака с промежуточным днищем

В таблицах 4.12–4.15 приведены рассчитанные частоты. Как и в предыдущем примере, для первого расчётного случая без жидкости имеется очень хорошее соответствие, что может служить подтверждением корректности повторения исходных данных в разных программах, а также адекватности разработанной модели. При расчёте гидроупругих колебаний разница в частотах достигает 8%, но в среднем отличие порядка 5%.

По данным из таблиц 4.12-4.15 построены графики и приведены на рисунке 4.17. Отличие между частотами, рассчитанными по МКЭ-МГЭ [26] и по разработанной методике в DARSYS показано по абсолютному значению в процентах.

Таблица 4.12 — Тороидальный бак с промежуточным днищем без жидкости

| Тон | Частота колебаний, Гц | | |
|-----|-----------------------|---------|------------|
| | МКЭ-МГЭ [26] | DARSYS | Разница, % |
| 1 | 288.791 | 288.520 | 0.09 |
| 2 | 290.980 | 290.800 | 0.06 |
| 3 | 295.077 | 294.840 | 0.08 |
| 4 | 318.746 | 318.270 | 0.15 |
| 5 | 320.948 | 320.580 | 0.11 |
| 6 | 324.175 | 323.770 | 0.12 |
| 7 | 384.924 | 384.400 | 0.14 |
| 8 | 393.270 | 392.700 | 0.14 |
| 9 | 396.838 | 396.350 | 0.12 |
| 10 | 415.925 | 415.320 | 0.15 |

Таблица 4.13 — Тороидальный бак с промежуточным днищем, заливка — 0.8м

| Тон | Частота колебаний, Гц | | |
|-----|-----------------------|---------|------------|
| | МКЭ-МГЭ [26] | DARSYS | Разница, % |
| 1 | 96.601 | 95.385 | 1.26 |
| 2 | 116.849 | 112.520 | 3.70 |
| 3 | 122.789 | 121.610 | 0.96 |
| 4 | 136.856 | 136.900 | -0.03 |
| 5 | 148.665 | 143.990 | 3.14 |
| 6 | 163.234 | 155.200 | 4.92 |
| 7 | 173.453 | 172.070 | 0.80 |
| 8 | 181.815 | 174.340 | 4.11 |
| 9 | 206.948 | 198.910 | 3.88 |
| 10 | 233.162 | 220.310 | 5.51 |

Таблица 4.14 — Тороидальный бак с промежуточным днищем, заливка — 1.05м

| Тон | Частота колебаний, Гц | | |
|-----|-----------------------|---------|------------|
| | МКЭ-МГЭ [26] | DARSYS | Разница, % |
| 1 | 82.413 | 81.462 | 1.15 |
| 2 | 93.661 | 97.105 | -3.68 |
| 3 | 110.905 | 102.630 | 7.46 |
| 4 | 117.977 | 120.180 | -1.87 |
| 5 | 127.204 | 128.070 | -0.68 |
| 6 | 149.509 | 140.370 | 6.11 |
| 7 | 152.290 | 144.970 | 4.81 |
| 8 | 173.449 | 166.680 | 3.90 |
| 9 | 177.167 | 167.700 | 5.34 |
| 10 | 192.683 | 183.320 | 4.86 |

Таблица 4.15 — Тороидальный бак с промежуточным днищем, заливка — 1.2м

| Тон | Частота колебаний, Гц | | |
|-----|-----------------------|---------|------------|
| | МКЭ-МГЭ [26] | DARSYS | Разница, % |
| 1 | 65.528 | 66.712 | -1.81 |
| 2 | 78.265 | 83.018 | -6.07 |
| 3 | 93.051 | 92.205 | 0.91 |
| 4 | 102.939 | 101.890 | 1.02 |
| 5 | 122.677 | 120.700 | 1.61 |
| 6 | 136.355 | 129.760 | 4.84 |
| 7 | 144.271 | 141.910 | 1.64 |
| 8 | 149.248 | 144.480 | 3.19 |
| 9 | 166.677 | 156.560 | 6.07 |
| 10 | 183.884 | 169.190 | 7.99 |

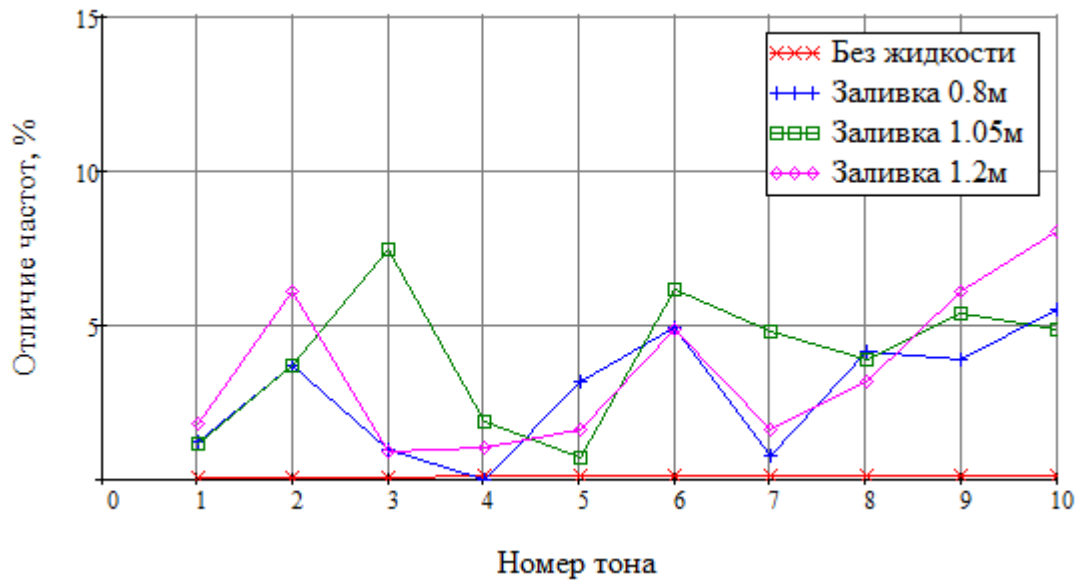
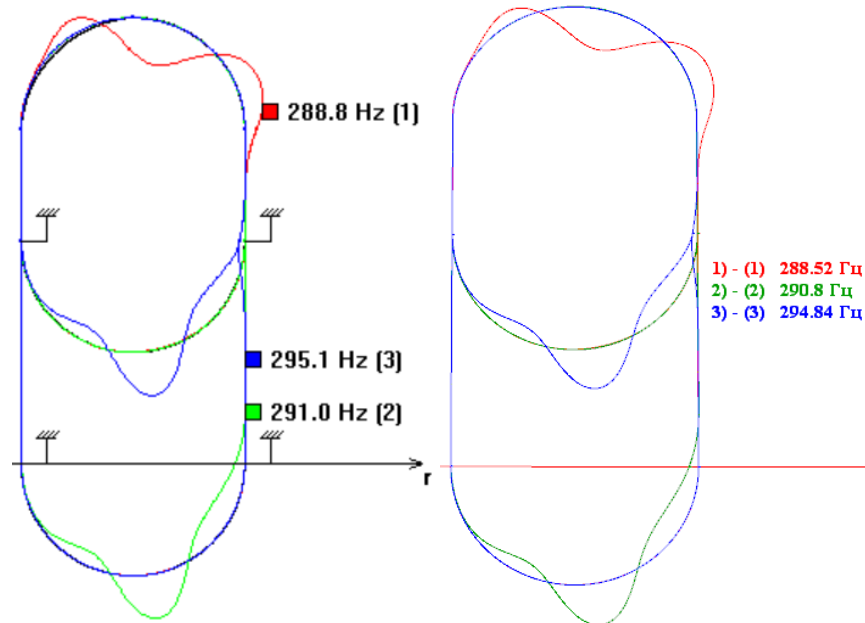


Рисунок 4.17 — Отличие частот тороидального бака с промежуточным днищем, рассчитанных по МКЭ-МГЭ и DARSYS для разных уровней заливки

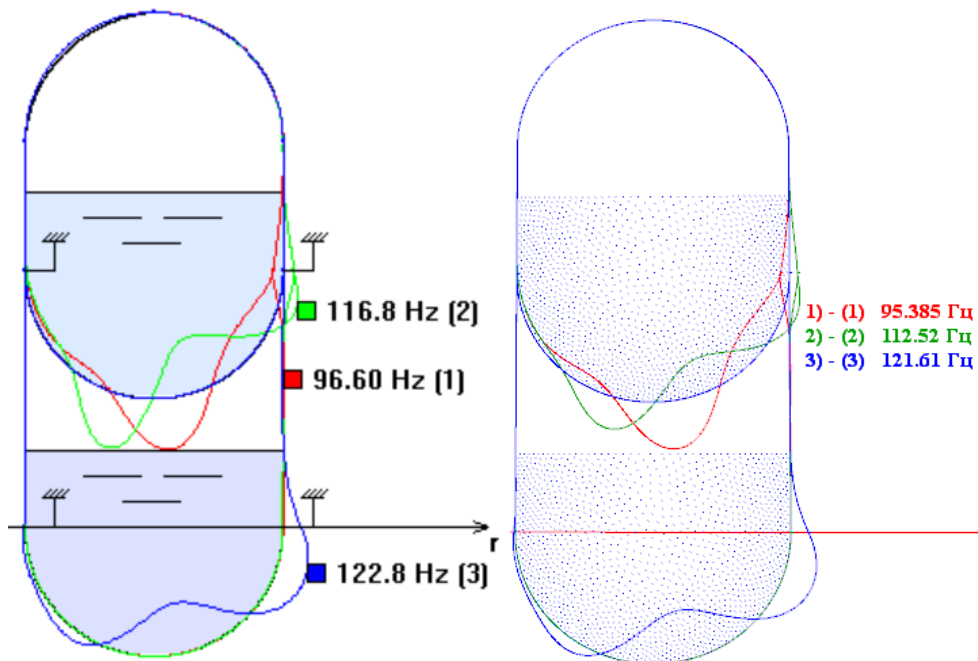
На рисунках 4.18–4.21 приведены формы трёх низших тонов колебаний при разных заливках, визуально формы совпадают с точностью до соответствующих масштабов.



а) МКЭ-МГЭ [26]

б) DARSYS

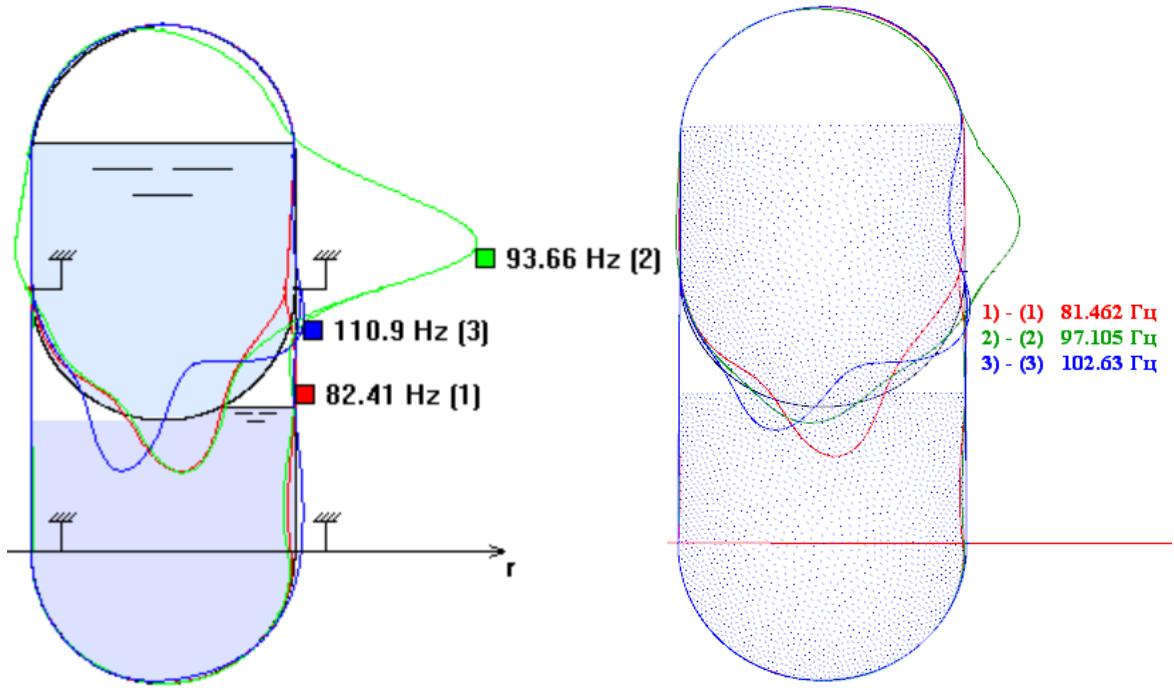
Рисунок 4.18 — Формы низших тонов колебаний тороидального бака с промежуточным днищем. Без жидкости



а) МКЭ-МГЭ [26]

б) DARSYS

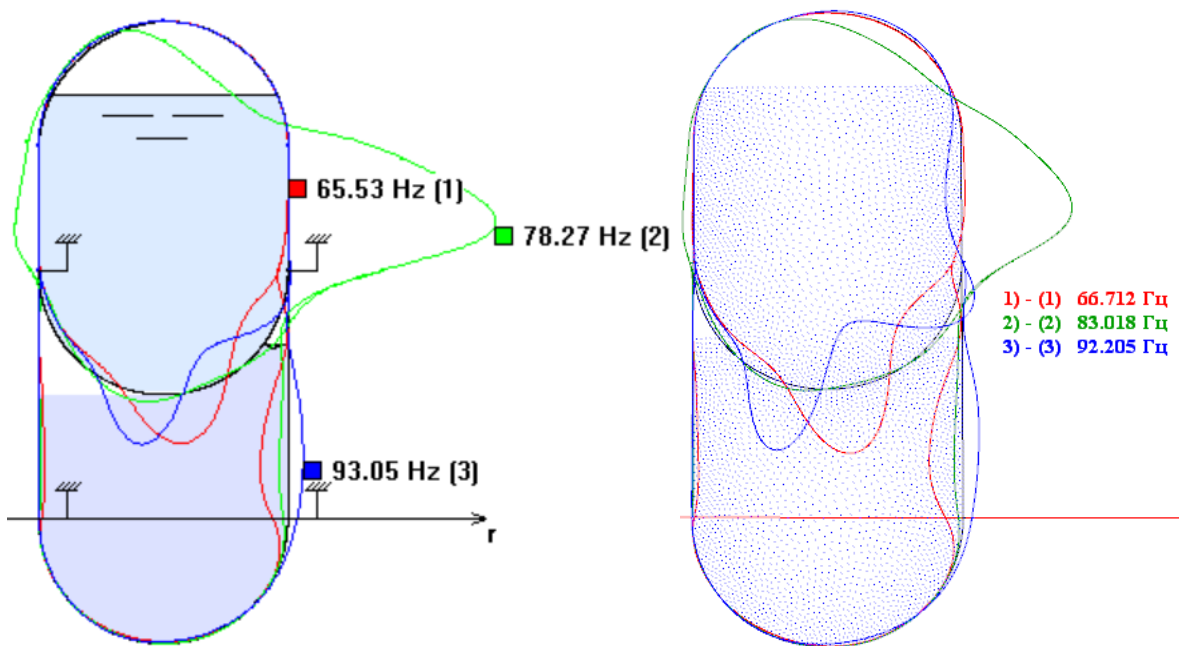
Рисунок 4.19 — Формы низших тонов колебаний тороидального бака с промежуточным днищем. Заливка 0.8м



а) МКЭ-МГЭ [26]

б) DARSYS

Рисунок 4.20 — Формы низших тонов колебаний тороидального бака с промежуточным днищем. Заливка 1.05м



а) МКЭ-МГЭ [26]

б) DARSYS

Рисунок 4.21 — Формы низших тонов колебаний тороидального бака с промежуточным днищем. Заливка 1.2м

4.3.3 Тороцилиндрический бак

Рассмотрим тестовый расчёт тороцилиндрического бака с промежуточным днищем, похожего на центральный бак разгонного блока Бриз-М. На рисунках 4.22 и 4.23 приведены расчётные случаи с разным уровнем заливки топлива и окислителя, там же указаны номера участков и узлов. Плотность жидкости в нижнем баке — 761.46 кг/м^3 , в верхнем — 1422 кг/м^3 . Материал бака ортотропный, модуль упругости материала в окружном направлении $E_1 = 80 \text{ ГПа}$, в меридиональном $E_2 = 60 \text{ ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu_{12} = 0.35$, плотность 2804 кг/м^3 . Материал шпангоутов изотропный: модуль упругости $E = 7.63 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, коэффициент Пуассона — 0.3 , плотность принята равной нулю, но имеются дополнительные массы (табл. 4.17), распределённые по соответствующим радиусам, которые имитируют подвеску двигателя и оборудования. Геометрические характеристики по участкам и координаты узлов приведены в таблицах 4.16 и 4.18 соответственно.

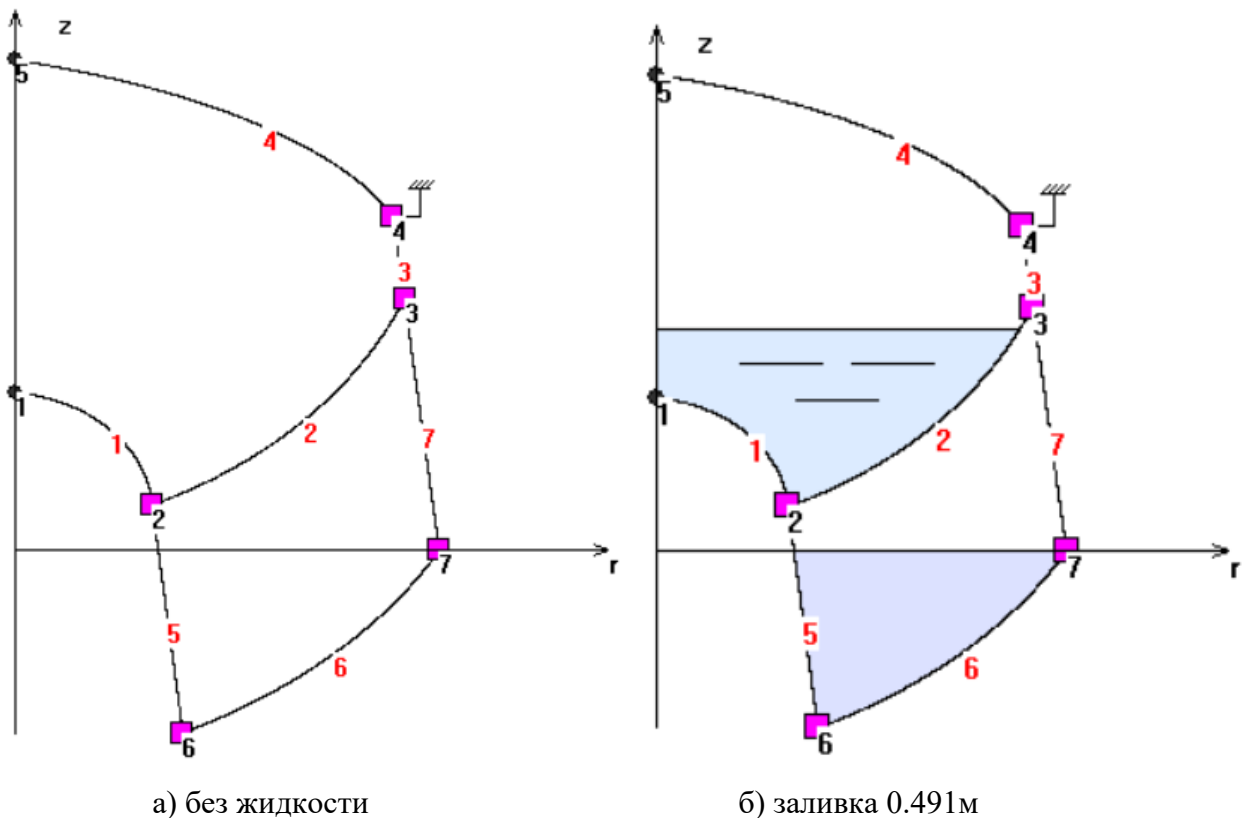


Рисунок 4.22 — Расчётная схема. Заливка а) и б)

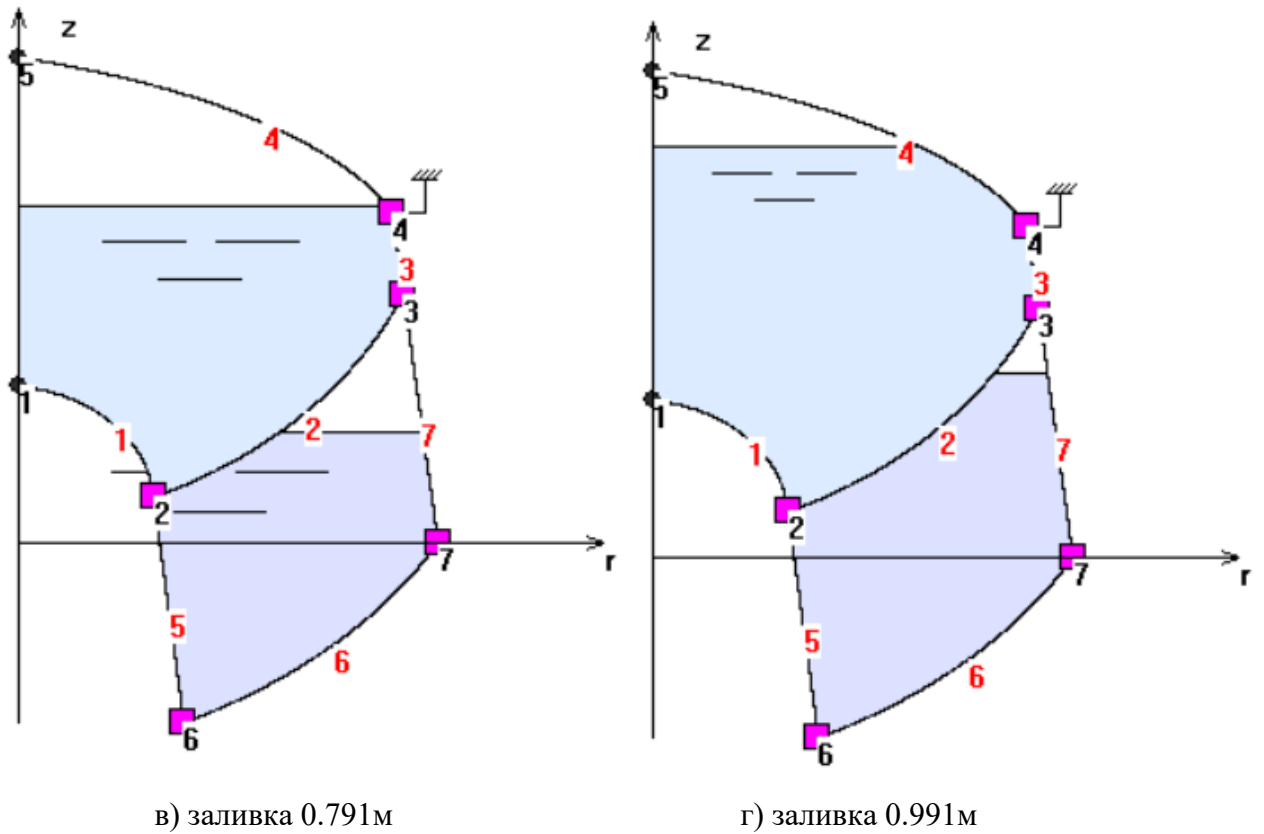


Рисунок 4.23 — Расчётная схема. Заливка в) и г)

Таблица 4.16 — Таблица участков

| № | Толщина, мм | Узел 1 | Узел 2 | Угол касательной 1 | Угол касательной 2 |
|---|-------------|--------|--------|--------------------|--------------------|
| 1 | 2 | 1 | 2 | 0 | -78.897 |
| 2 | 2.9 | 2 | 3 | 17.808 | 60.65 |
| 3 | 1.6 | 3 | 4 | 97.907 | 97.907 |
| 4 | 1.7 | 4 | 5 | 134.983 | 180 |
| 5 | 3.0 | 2 | 6 | -82.093 | -82.093 |
| 6 | 1.3 | 6 | 7 | 18.276 | 52.56 |
| 7 | 1.25 | 7 | 3 | 97.907 | 97.907 |

Таблица 4.17 — Характеристики шпангоутов

| № | Узел крепления | Площадь поперечного сечения, м ² | Доп. масса, кг |
|---|----------------|---|----------------|
| 1 | 2 | 1.277×10^{-3} | 17 |
| 2 | 3 | 0.615×10^{-3} | 40 |
| 3 | 4 | 0.481×10^{-3} | 8 |
| 4 | 6 | 1.039×10^{-3} | 401 |
| 5 | 7 | 0.541×10^{-3} | 65 |

Таблица 4.18 — Координаты узлов

| Узел | r , м | z , м |
|------|---------|---------|
| 1 | 0.000 | 0.425 |
| 2 | 0.367 | 0.123 |
| 3 | 1.046 | 0.677 |
| 4 | 1.015 | 0.900 |
| 5 | 0.000 | 1.321 |
| 6 | 0.450 | -0.491 |

В таблицах 4.19–4.22 приведены рассчитанные частоты. Разница в частотах в среднем порядка 5%, но при большой заливке достигает 9.5%. Наличие такой разницы показывает необходимость развигать принципиально разные подходы к решению задач, чтобы можно было сравнивать результаты и оценивать их точность.

По данным из таблиц 4.19–4.22 построены графики и приведены на рисунке 4.24. Отличие между частотами, рассчитанными по МКЭ-МГЭ [26] и по разработанной методике в DARSYS показано по абсолютному значению в процентах.

Таблица 4.19 — Тороцилиндрический бак без жидкости

| Тон | Частота колебаний, Гц | | |
|-----|-----------------------|---------|------------|
| | МКЭ-МГЭ [26] | DARSYS | Разница, % |
| 1 | 71.752 | 71.095 | 0.92 |
| 2 | 362.022 | 361.120 | 0.25 |
| 3 | 471.882 | 470.380 | 0.32 |
| 4 | 531.080 | 529.420 | 0.31 |
| 5 | 549.233 | 547.540 | 0.31 |
| 6 | 565.129 | 564.520 | 0.11 |
| 7 | 573.559 | 571.910 | 0.29 |
| 8 | 585.767 | 584.190 | 0.27 |
| 9 | 590.452 | 586.080 | 0.74 |
| 10 | 592.769 | 590.800 | 0.33 |

Таблица 4.20 — Тороцилиндрический бак, заливка — 0.491м

| Тон | Частота колебаний, Гц | | |
|-----|-----------------------|---------|------------|
| | МКЭ-МГЭ [26] | DARSYS | Разница, % |
| 1 | 53.845 | 52.237 | 2.99 |
| 2 | 66.457 | 65.604 | 1.28 |
| 3 | 89.712 | 92.070 | -2.63 |
| 4 | 100.706 | 100.040 | 0.66 |
| 5 | 126.820 | 123.600 | 2.54 |
| 6 | 134.373 | 133.970 | 0.30 |
| 7 | 148.924 | 142.840 | 4.09 |
| 8 | 168.676 | 159.410 | 5.49 |
| 9 | 169.926 | 165.850 | 2.40 |
| 10 | 187.708 | 174.890 | 6.83 |

Таблица 4.21 — Тороцилиндрический бак, заливка — 0.791м

| Тон | Частота колебаний, Гц | | |
|-----|-----------------------|---------|------------|
| | МКЭ-МГЭ [26] | DARSYS | Разница, % |
| 1 | 41.781 | 39.719 | 4.93 |
| 2 | 50.449 | 47.969 | 4.92 |
| 3 | 76.016 | 79.233 | -4.23 |
| 4 | 83.802 | 85.139 | -1.60 |
| 5 | 101.706 | 104.060 | -2.31 |
| 6 | 110.713 | 109.840 | 0.79 |
| 7 | 128.205 | 127.210 | 0.78 |
| 8 | 133.445 | 130.610 | 2.12 |
| 9 | 149.260 | 144.840 | 2.96 |
| 10 | 150.300 | 145.670 | 3.08 |

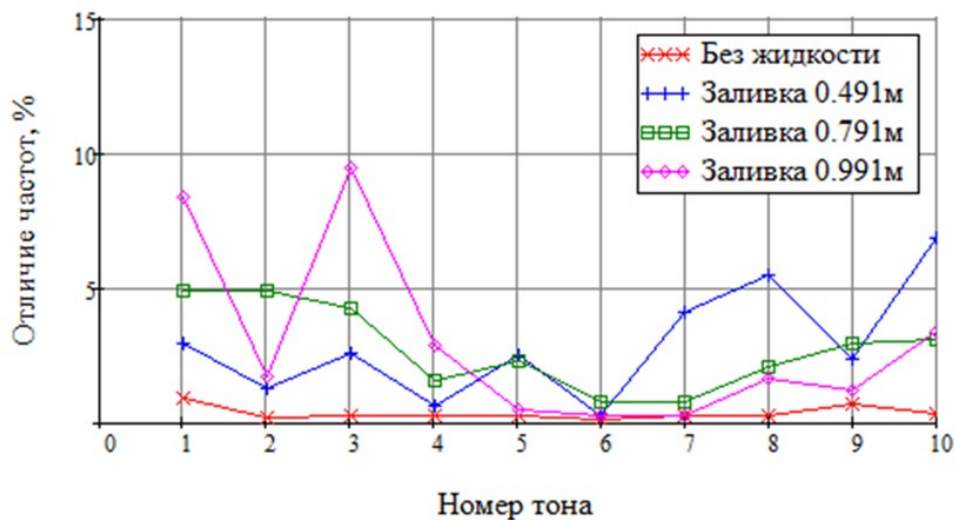


Рисунок 4.24 — Отличие частот тороцилиндрического бака, рассчитанных по МКЭ-МГЭ и DARSYS для разных уровней заливки

Таблица 4.22 — Тороцилиндрический бак с промежуточным днищем, заливка – 0.991м

| Тон | Частота колебаний, Гц | | |
|-----|-----------------------|---------|------------|
| | МКЭ-МГЭ [26] | DARSYS | Разница, % |
| 1 | 30.444 | 27.889 | 8.39 |
| 2 | 40.474 | 41.177 | -1.74 |
| 3 | 60.153 | 65.858 | -9.48 |
| 4 | 75.097 | 77.252 | -2.87 |
| 5 | 78.340 | 78.747 | -0.52 |
| 6 | 101.297 | 100.970 | 0.32 |
| 7 | 104.170 | 104.450 | -0.27 |
| 8 | 114.582 | 112.720 | 1.63 |
| 9 | 123.037 | 121.560 | 1.20 |
| 10 | 133.875 | 129.350 | 3.38 |

На рисунках 4.25–4.28 приведены формы трёх низших тонов колебаний, рассчитанные по МКЭ-МГЭ [26] и по разработанной методике в DARSYS для разных уровней заливки. Визуально формы совпадают с точностью до соответствующих масштабов.

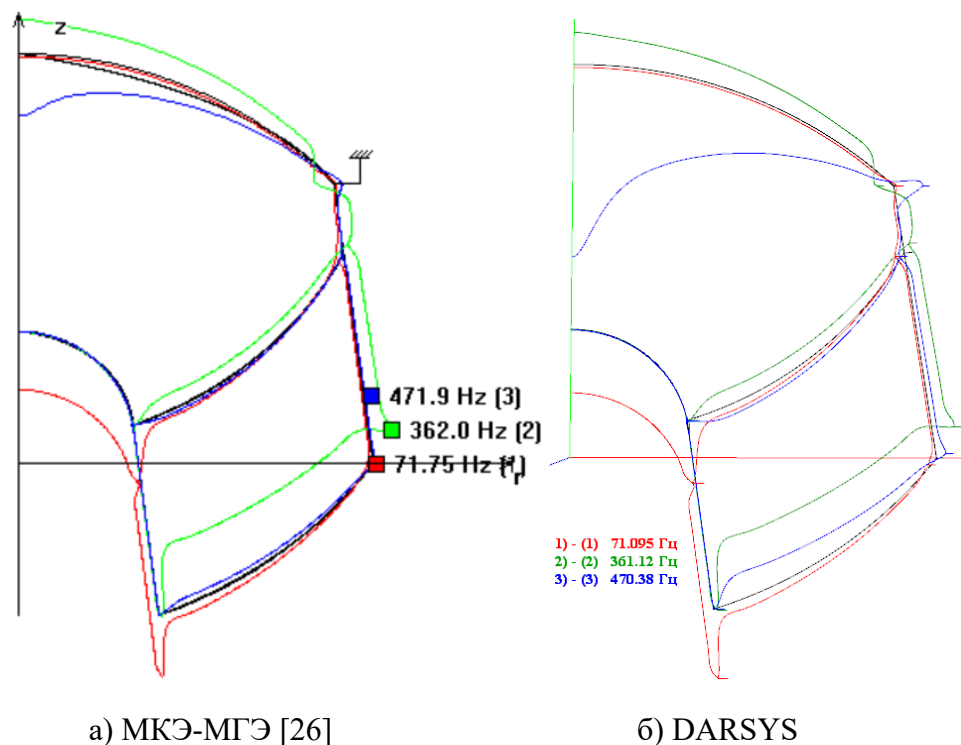
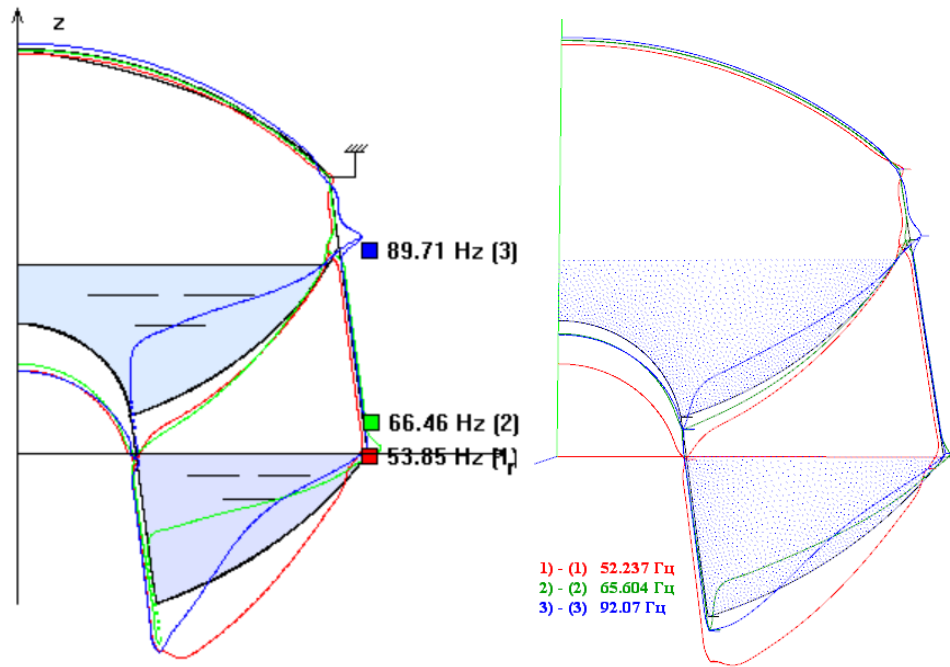


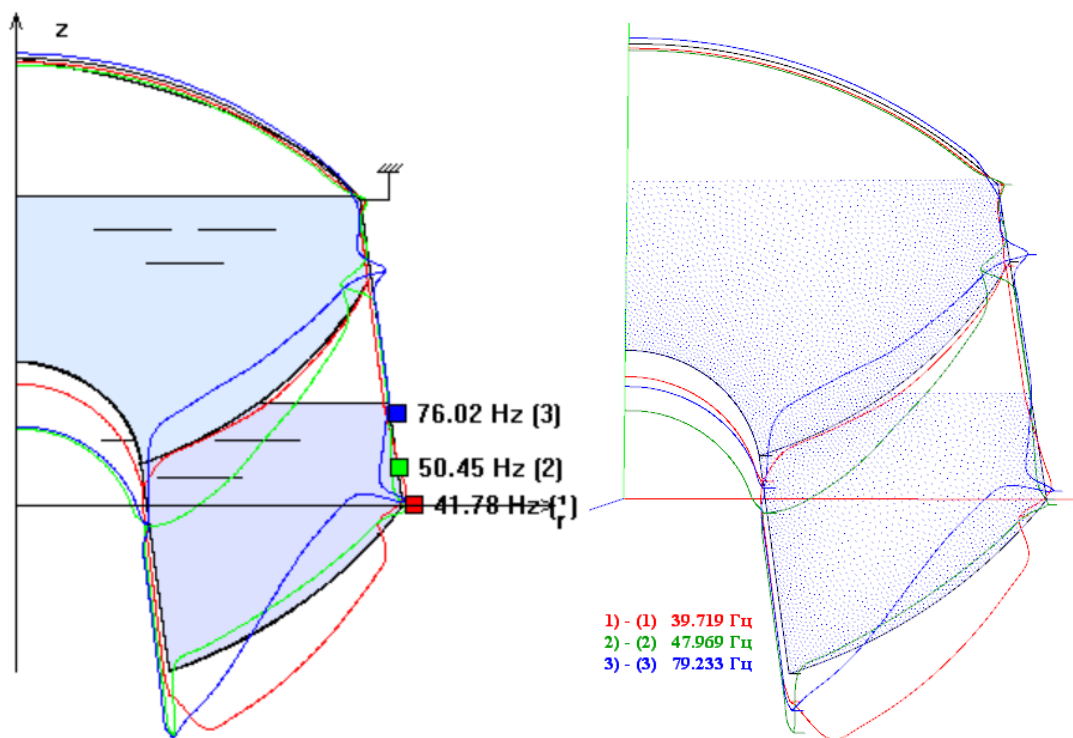
Рисунок 4.25 — Формы низших тонов колебаний тороцилиндрического бака с промежуточным днищем. Без жидкости



а) МКЭ-МГЭ [26]

б) DARSYS

Рисунок 4.26 — Формы низших тонов колебаний тороцилиндрического бака с промежуточным днищем. Заливка 0.491м



а) МКЭ-МГЭ [26]

б) DARSYS

Рисунок 4.27 — Формы низших тонов колебаний тороцилиндрического бака с промежуточным днищем. Заливка 0.791м

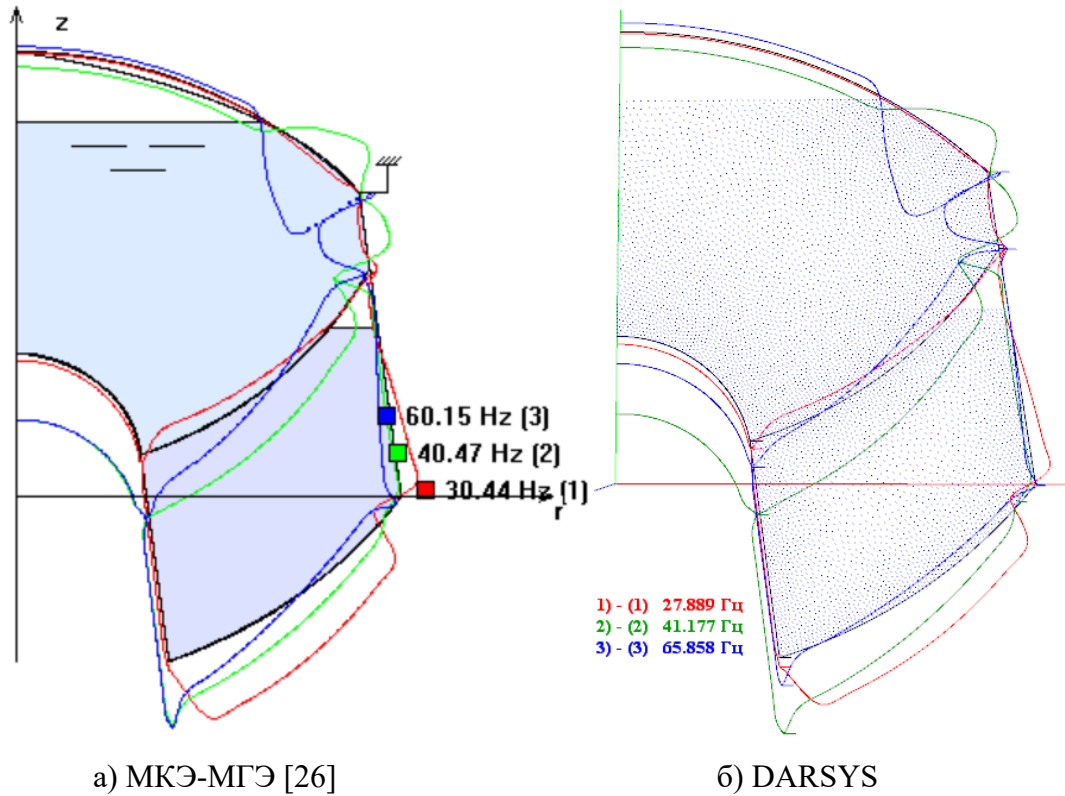


Рисунок 4.28 — Формы низших тонов колебаний тороцилиндрического бака с промежуточным дном. Заливка 0.991м

Выводы по главе 4

В данной главе получены следующие основные результаты:

1. Проведено решение тестовых задач с помощью разработанной методики на основе уравнений динамического осесимметричного деформирования ортотропной оболочки вращения, полученных в предыдущей главе. На примере составной оболочки, выполненной из ортотропных материалов с разными соотношениями модулей упругости в окружном и меридиональном направлениях, показано хорошее соответствие частот собственных колебаний, рассчитанных по разработанной методике и методом конечных элементов в реализации ANSYS и программы Левина В.Е.

2. Приведены результаты решения тестовых задач о расчёте гидроупругих колебаний нескольких баков простой формы, опубликованных в работах других

исследователей. Проведено сравнение, получены удовлетворительные результаты. Показана сходимость рассчитываемых частот при увеличении числа разбиений меридиана оболочки при разных размерах трафарета МКР и двух степеней чётной полигармонической РБФ. Существенное отличие рассчитываемых частот в некоторых тестовых примерах может быть вызвано не только применением различных численных методов, но и разной постановкой задачи о течении жидкости.

3. Работоспособность методики продемонстрирована на примере расчёта связок баков (с промежуточным днищем), цилиндрической и тороидальной формы, а также тороцилиндрического бака из ортотропного материала, подкреплённого шпангоутами с дополнительными массами для нескольких уровней заполнения жидкостью. Для сопоставления результатов расчёта использовалась программа Левина В.Е., реализующая метод конечных и граничных элементов. Получено хорошее соответствие частот для сухих баков и удовлетворительное соответствие при больших уровнях заливки жидкостью. Наличие разницы в рассчитываемых частотах показывает необходимость развивать альтернативные методики расчёта и совершенствовать существующие методы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Из общей системы уравнений движения оболочки, записанной для разрешающих функций в глобальной системе координат, представлен вывод системы уравнений ортотропной осесимметричной оболочки, описывающих геометрически линейное и нелинейное деформирование с учётом утонения/утолщения, поперечного сдвига и больших продольных деформаций. Для тестирования полученных уравнений разработана программа на языке Fortran, а также скрипт APDL для получения параметрических решений в ANSYS с разными типами конечных элементов. Проведено тестирование полученных уравнений на примерах статического деформирования нескольких оболочек канонической формы, исследована сходимость результатов, получено хорошее соответствие.

2. На основе полученной системы уравнений движения сформулирована краевая задача о гидроупругих колебаниях оболочки с идеальной несжимаемой жидкостью, которая описывается потенциалом перемещений. Для решения применён метод конечных разностей: на меридиане оболочки применяется центральная разность, а в области, занятой жидкостью, весовые коэффициенты разложения уравнения Лапласа и граничных условий вычисляются с помощью сплайн-интерполяции на основе полигармонических радиальных базисных функций. Методика решения внедрена в программный комплекс DARSYS (автор Красноруцкий Д.А.).

3. Проведены тестовые расчёты колебаний баков простой и сложной формы, в том числе связок баков, подкреплённых шпангоутами с дополнительными массами от агрегатов, результаты сопоставлены с опубликованными данными, а также рассчитанными в ANSYS и программе Левина В.Е., реализующей МКЭ-МГЭ. Получено удовлетворительное соответствие. Приведенные расчётные данные могут быть использованы другими исследователями для тестирования существующих и новых подходов к решению задач осесимметричных гидроупругих колебаний баков.

4. Разработанная методика, реализованная в программе DARSYS, может использоваться для расчёта частот и форм продольных колебаний жидкостных баков с произвольной формой меридиана, а также связок баков и баков с промежуточных днищем, подкреплённых шпангоутами и дополнительными массами, имитирующими подвеску двигателя и других агрегатов. Получаемые частоты и формы колебаний являются исходными данными для решения задачи о продольной устойчивости ракет-носителей на активном участке полёта.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы

Разработанный подход к расчёту частот гидроупругих колебаний осесимметричных ортотропных оболочек с помощью РБФ-КР (RBF-FD) может быть применён в расчёте общего случая пространственных оболочек и пластин, а также обладает потенциалом развития, в частности, для получения непосредственной оценки достигнутого решения и улучшения этого решения методом отложенной коррекции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аннин Б. Д., Волчков Ю.М.* Неклассические модели теории пластин и оболочек // Прикладная механика и техническая физика. — 2016. — Т. 4, № 5. — С. 5–14. DOI: 10.15372/PMTF20160501.
2. A nonlocal nonlinear stiffened shell theory with stiffeners modeled as geometrically-exact beams / Zhang Qi, Li Shaofan, Zhang A-Man, Peng Yuxiang, Zhou Kun // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2022. — Vol. 397. — 115150. DOI: 10.1016/j.cma.2022.115150.
3. *Erdogan Madenci, Erkan Oterkus.* Peridynamic Theory // Peridynamic Theory and Its Applications. — Springer New York, 2013. — P. 19–43. DOI: 10.1007/978-1-4614-8465-3_2.
4. Implicit differentiation-based reliability analysis for shallow shell structures with the Boundary Element Method / Zhuang Mengke, Morse Llewellyn, Sharif Khodaei Zahra, M.H. Aliabadi // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2023. — Vol. 156. — P. 223–238. DOI: 10.1016/j.enganabound.2023.07.041.
5. *Абросимов Н.А., Баженов В.Г.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций // Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного. Университета, 2002. — 399 с. — ISBN: 5-85746-639-3.
6. *Ахундов В. М.* Метод неявных конечных разностей в механике деформирования однородных и кусочно-однородных тел // Механика композитных материалов. — 2021. — Т. 57, № 6. — С. 1129–1154. DOI: 10.22364/mkm.57. 6.07.
7. Buckling analysis of laminated composite elliptical shells using the spline finite strip procedure / N. Korkeai, A. Alizadeh, D. Poorveis, S. Moradi, P. Pasha // Heliyon. — 2023. — Vol. 9, no. 9. — e19328. DOI: 10.1016/j.heliyon.2023.e19328.
8. *Maksimyuk V. A., Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S.* Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and

- composite shells (review) // *International Applied Mechanics*. — 2012. — Vol. 48, no. 6. — P. 613–687. DOI: 10.1007/s10778-012-0544-8.
9. *Chang-New Chen*. Differential quadrature finite difference method for structural mechanics problems // *Communications in Numerical Methods in Engineering*. — 2001. — Vol. 17, no. 6. — P. 423–441. DOI: 10.1002/cnm.418.
 10. *Барулина М.А.* Применение обобщенного метода дифференциальных квадратурк решению двумерных задач механики // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика*. — 2018. — Т. 18, № 2. — С. 206–216. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-206-216.
 11. *Tornabene F., Viscoti M., Dimitri R.* Free vibration analysis of laminated doubly-curved shells with arbitrary material orientation distribution employing higher order theories and differential quadrature method // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2023. — Vol. 152. — P. 397–445. DOI: 10.1016/j.enganabound.2023.04.008.
 12. Natural vibration of an elastically supported porous truncated joined conical-conical shells using artificial spring technology and generalized differential quadrature method / H. Li, Y.X. Hao, W. Zhang, L.T. Liu, S.W. Yang, Y.T. Cao // *Aerospace Science and Technology*. — 2022. — Vol. 121. — 107385. DOI: 10.1016/j.ast.2022.107385.
 13. *Smith T.A.* Numerical stability analysis for the explicit high-order finite difference analysis of rotationally symmetric shells // *Journal of Sound and Vibration*. — 2008. — Vol. 312, no. 3. — P. 418–441. DOI: 10.1016/j.jsv.2007.07.093.
 14. *Коровайцева Е.А.* К обоснованию однозначности продолжения решения задач о деформировании мягких оболочек методом дифференцирования по параметру // *Проблемы прочности и пластичности*. — 2022. — Т. 84, № 3. — С. 343–350. DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-3-343-350.
 15. *Коровайцева Е.А.* Применение метода дифференцирования по параметру в решении нелинейных задач стационарной динамики осесимметричных мягких оболочек // *Вестник Самарского государственного технического*

- университета. Серия «Физико–математические науки». — 2021. — Т. 25, № 3. — С. 556–570. DOI: 10.14498/vsgtu1855.
16. *Подкопаев С.А.* Численное моделирование закритического нелинейного деформирования осесимметричных мембран // Математическое моделирование и численные методы. — 2020. — Т. 25, № 1. — С. 64–87. DOI: 10.18698/2309-3684-2020-1-6487.
 17. Application of the method of finite differences to the calculation of shallow shells / I. Hamzaev, K. Gapparov, E. Umarov, Z. Abdullaev // *Universum: Technical sciences*. — 2021. — Vol. 84, no. 3–4. — P. 71–76. DOI: 10.32743/UniTech.2021.84.3-4.71-76.
 18. *Morozov E.V., Evseev E.G.* Finite difference method for the analysis of filament wound composite shells / *Proceedings of ICCM–11*. — Gold Coast–Australia, 1997. — P. 730–737.
 19. *Беляев А.К., Зиновьева Т.В., Смирнов К.К.* Теоретическое и экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния сильфонных компенсаторов как упругих оболочек // Математическое моделирование физических процессов. — 2017. — Т. 10, № 1. — С. 9–19. DOI: 10.18721/JPM.10101.
 20. *Барменкова Е.В.* Применение метода конечных разностей к задачам изгиба прямоугольных плит на упругом основании // *Инженерный вестник Дона*. — 2023. — Т. 6, № 102. — С. 635–644.
 21. *Языев С.Б., Чепурненко А.С.* Выпучивание прямоугольных пластин при нелинейной ползучести // *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. — 2023. — Т. 23, № 3. — С. 257–268. DOI: 10.23947/2687-1653-2023-23-3-257-268.
 22. Применение глобальных координат в модели составной осесимметричной оболочки при анализе ее статического и динамического поведения / В.Е. Левин, А.Н. Пель, Д.А. Красноруцкий, П.З. Алюкаев // *Научный вестник Новосибирского государственного технического университета*. — 2013. — Т. 53, № 4. — С. 114–123.

23. *Pereyra V.* Pasva3: An adaptive finite difference fortran program for first order nonlinear, ordinary boundary problems // *Lecture Notes in Computer Science.* — Springer Berlin Heidelberg, 1979. — P. 67–88. DOI: 10.1007/3-540-09554-3_4.
24. *Пустовой Н.В., Левин В.Е., Красноруцкий Д.А.* Алгоритм численного решения нелинейной краевой задачи динамического деформирования тонкого стержня // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.* — 2014. — № 2. — С. 168–199.
25. *Колесников К.С. Самойлов Е.А. Рыбак С.А.* Динамика топливных систем ЖРД. — М.: Машиностроение, 1975. — 172 с.
26. *Левин В.Е.* Метод конечных и граничных элементов в динамике конструкций летательных аппаратов: дисс. ... д-ра тех. Наук: 05.07.03 / Левин Владимир Евгеньевич. — Новосибирский государственный технический университет, 2001. — 341 с.
27. *Остроградский М.В.* Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне // *М.В. Остроградский. Избранные труды.* Издательство Академии Наук СССР. — 1958. — С. 111–130.
28. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // *Избранные сочинения* — М.: Гостехиздат. — 1948. — Т. 1. — С. 31–153.
29. *Галкин М.С.* Теория колебаний упругих тел с деформируемыми полостями, частично заполненными сжимаемой жидкостью // *Ученые записки ЦАГИ.* — 1977. — Т. 8, № 2. — С. 90–96.
30. *Григолюк Э.И.* Проблемы взаимодействия оболочек с жидкостью // *Труды УП Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок.* — М.: Наука. — 1970. — С. 755–778.
31. *Колесников К.С.* Динамика ракет. — М.: Машиностроение. — 1980. — 376 с.
32. *Колесников К.С.* Продольные колебания ракеты с жидкостным ракетным двигателем. — М: Машиностроение, 1971. — 270 с.
33. *Натанзон М.С.* Продольные автоколебания жидкостной ракеты. — М.: Машиностроение, 1977. — 206 с.

34. *Рабинович Б.И.* Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1975. — 416 с.
35. *Микишев Г.Н., Рабинович Б.И.* Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. — М.: Машиностроение, 1971. — 564 с.
36. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. — М.: Наука, 1965. — 440 с.
37. *Болотин В.В.* О движении жидкости в колеблющемся сосуде // Прикладная математика и механика. — 1956. — Т. 20, № 5. — С. 293–294.
38. *Бреславский В.Е.* Колебания цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью // IV Всесоюзн. конф. по теор. оболочек и пластин / Сб. научн. трудов. — М.: Академия наук СССР. — 1964. — С. 255–261.
39. *Моисеев Н.Н.* К теории колебаний упругих тел, имеющих жидкие полости // Прикладная математика и механика. — 1959. — Т. 23, № 5. — С. 862–878.
40. *Моисеев Н.Н.* Некоторые вопросы теории колебаний сосудов с жидкостью // Инженерный журнал. — 1954. — Т. 19. — С. 167–170.
41. *Нариманов Г.С.* О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью // Прикладная математика и механика. — 1956. — Т. 2, № 1. — С. 21–38.
42. *Рабинович Б.И.* Об уравнениях упругих колебаний тонкостенных стержней с жидким заполнением при наличии свободной поверхности // Известия Академии наук СССР. Механика и машиностроение. — 1959. — № 4. — С. 63–68.
43. *Miles J.W.* On the sloshing of liquid in a flexible tank // Journal of Applied Mechanics. — 1959. — Vol. 25, no. 6. — P. 277–283.
44. *Балабух Л.И.* Взаимодействие оболочек с жидкостью и газом // Труды VI Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластинок. — М.: Наука. — 1966. — С. 935–944.
45. *Балабух Л.И., Молчанов А.Г.* Осесимметричные колебания сферической оболочки, частично заполненной жидкостью // Инженерный журнал : МТТ. Механика твердого тела. — 1967. — Т. 5. — С. 56–61.

46. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (удар и погружение). — Л.: Судостроение, 1976. — 200 с.
47. Abramson H.N. Dynamic Behavior of Liquid in Moving Container // Applied Mechanics Reviews. — 1963. — Vol. 16, no. 17. — P. 501–506.
48. Микушев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — М.: Машиностроение, 1968. — 532 с.
49. Анисимов А.М. Применение конечно-разностных методов к расчету осесимметричных колебаний оболочек вращения с жидкостью // Известия высших учебных заведений. — Авиационная техника. — 1968. — № 3. — С. 23–31.
50. Антонов В.Н. Применение метода суммарных представлений при исследовании колебаний оболочек с жидкостью // Колебания упругих конструкций с жидкостью / Сборник научных трудов симпозиума. — М.: ЦНТИ Волна. — 1976. — С. 22–26.
51. Богадица Э.С. Брусиловский А.Д. Шмаков В.П. Применение численного метода к расчету собственных колебаний составных оболочек вращения, частично заполненных жидкостью // Прикладная механика. — 1977. — Т. 13, № 1. — С. 81–85.
52. Брусиловский А.Д., Шмаков В.П., Яблоков В.А. Метод расчета собственных и вынужденных колебаний упругих оболочек вращения, заполненных идеальной несжимаемой жидкостью // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. — 1973. — № 3. — С. 99–110.
53. Грибков В.А., Адаменко Р.А. Двумерная модель жидкости для расчета собственных частот колебаний осесимметричных гидрооболочечных систем // Engineering Journal: Science and Innovation. — 2017. — № 3(63). — 1593. DOI: 10.18698/2308-6033-2017-3-1593.
54. Грибков В.А., Соколов В.Ф. Решение в матричных рядах задачи о собственных колебаниях тонкостенного бака, частично заполненного жидкостью // Расчет тонкостенных элементов конструкций. — Труды МВТУ. — 1975. — № 206. — С. 86–92.

55. *Ильгамов М.А.* Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. — М.: Наука, 1969. — 184 с.
56. *Александрович Л.И., Лампер Р.Е.* Собственные колебания упругого осесимметричного сосуда произвольного контура // Труды VI Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластинок. — М.: Наука. — 1966. — С. 25–27.
57. *Лампер Р.Е.* К расчету собственных колебаний баков методом Ритца с варьируемым параметром // Труды УП Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. — М.: Наука. — 1970. — С. 351–354.
58. *Пожалостин А.А.* Точные решения задачи о колебаниях двусвязных оболочек с жидкостью // Сборник трудов МВТУ. — № 306.— 1979.— С.20 – 30.
59. *Пшеничнов Г.И.* Применение асимптотического метода интегрирования в задаче о свободных колебаниях тонкой упругой оболочки вращения, частично заполненной жидкостью // Труды УП Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. — М.: Наука. — 1970. — С. 524–527.
60. *Рапопорт И.М.* Колебания упругой оболочки частично заполненной жидкостью. — М.: Машиностроение, 1967.— 360 с.
61. *Кандидов В.П., Христочевский С.А.* Анализ колебаний оболочки, частично заполненной сжимаемой жидкостью, методом конечных элементов // Колебания упругих конструкций с жидкостью / Сборник научных трудов симпозиума. — М. — ЦНТИ Волна. — 1980. — С. 136–141.
62. *Мокеев В.В.* Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом методом конечных элементов // Известия РАН. Механика твердого тела. — 1998. — Т. 6. — С. 166–174.
63. *Григорьев В.Г.* Методология исследования динамических свойств сложных упругих и гидроупругих систем: дисс. ... д-ра тех. Наук: 01.02.06 / Григорьев Валерий Георгиевич. — М., 2000. — 326 с.
64. *Григорьев В.Г.* Применение метода конечных элементов к расчету колебаний упругих оболочечных конструкций содержащих жидкость // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. — Труды научного семинара. — ТГУ. — 1978. — С. 55–60.

65. *Шклярчук Ф.Н.* Динамические характеристики упругих тонкостенных баков с жидкостью при продольных колебаниях // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. — 1971. — № 5. — С. 131–141.
66. *Шклярчук Ф.Н.* О вариационных методах расчета осесимметричных колебаний оболочек вращения, частично заполненных жидкостью // Труды VI всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. — М.: Наука. — 1966. — С. 835–840.
67. Experimental investigation of liquid-tank interaction effects on full containment LNG storage tanks through shaking table tests / Wei Liu, Chang Xiao, Hao Zhou, Chenyan Wang // *Thin-Walled Structures*. — 2024. — Vol. 196. — 111527. DOI: 10.1016/j.tws.2023.111527.
68. *Шуников А.Н., Мисюра С.Ю., Ярещенко В.Г.* Численное и экспериментальное исследование гидроупругих колебаний оболочек // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. — 2014. — Т. 6, № 7(72). — С. 8–12. DOI: 10.15587/1729-4061.2014.28861.
69. *Jhung Myung Jo, Jo Jong Chull, Jeong Kyeong Hoon.* Modal analysis of conical shell filled with fluid // *Journal of Mechanical Science and Technology*. — 2006. — Vol. 20, no. 11. — P. 1848–1862. DOI: 10.1007/BF03027578.
70. *Гончаров Д.А., Пожалостин А.А., Кокушкин В.В.* Моделирование осесимметричных колебаний упругого бака с жидкостью с учетом сил поверхностного натяжения посредством механического аналога // Наука и образование МГТУ им. Баумана. — 2015. — № 6. — С. 372–383. DOI: 10.7463/0615.0779724.
71. *Григолюк Э. И. Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. — М: ВИНТИ. — 1973. — Т. 5. — 273 с.
72. *Dubois T.T., De Rouvray A.L.* An improved fluid superelement for the coupled solid-fluid-surface wave dynamic interaction problem // *The European Physical Journal plus. Dynam.* — 1978. — Vol. 6, no 3. — P. 235–245.
73. *Phan Hoang Nam, Paolacci Fabrizio.* Fluid-structure interaction problems: An application to anchored and unanchored steel storage tanks subjected to seismic

- loadings // arXiv: Numerical Analysis. — 2018. — 119665563. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:119665563>.
74. *Ping Yi Lu, Jing Ji*. Modal Analysis on Anchored Tank Considering Shell and Fluid Coupling // *Advanced Materials Research*. — 2012. — Vol. 549. — P. 903–907. DOI: 10.4028/www.scientific.net/amr.549.903.
75. *Мокеев В.В.* Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов // *Известия РАН. Механика твердого тела*. — 1998. — № 6. — С. 166–174.
76. *Шклярчук Ф.Н.* Расчет колебаний оболочек вращения с жидкостью методом конечных элементов // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. — 2015. — № 1. — С. 17–29.
77. *Шклярчук Ф.Н., Чжунбум Р.* Расчет неосесимметричных колебаний оболочек вращения с жидкостью методом конечных элементов // *Вестник МАИ*. — 2013. — Т. 20, № 2. — С. 49–58.
78. Сравнение методов конечных и граничных элементов в задачах о колебаниях составной оболочки вращения с жидкостью / В.И. Гнитько, К. Дегтярев, Е. Кононенко, А. Тонконоженко // *Вестник Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина*. — 2019. — № 42. — С. 38–45.
79. *Mohammadi N., Aghdam M.M., Asadi H.* Instability analysis of conical shells filled with quiescent fluid using generalized differential quadrature method // *The 26th Annual Int. Conference of Iranian Society of Mechanical Engineers-ISME2018*, 24–26 April 2018, School of Mechanical Engineering, Semnan Univ., Iran, ISME2018–1216.
80. *Бочкарев С.А., Лекомцев С.В., Матвеев В.П.* Собственные колебания усеченных конических оболочек, содержащих жидкость // *Прикладная математика и механика*. — 2022. — Т. 86, № 4. — С. 505–526. DOI: 10.31857/S0032823522040038.
81. Free vibration of layered truncated conical shells filled with quiescent fluid using spline method / Nurul Izyan M.D., K.K. Viswanathan, Aziz Z.A., Lee Jang Hyun,

- K. Prabakar // *Composite Structures*. — 2017. — Vol. 163. — P. 385–398. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.12.011.
82. Fluid–shell structure interactions with finite thickness using immersed method / Narendra S. Nanal, Scott T. Miller, Jesse D. Thomas, Lucy T. Zhang // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 2023. — Vol. 403. — 115697. DOI: 10.1016/j.cma.2022.115697.
83. *Amabili M., Moghaddasi H.R.* Non-linear dynamics of cantilevered circular cylindrical shells with thickness stretch, containing quiescent fluid with small amplitude sloshing // *Journal of Sound and Vibration*. — 2023. — Vol. 571. — 118052. DOI: 10.1016/j.jsv.2023.118052.
84. Free and forced vibration of fluid-filled laminated cylindrical shell under hydrostatic pressure / Wu Jiang-hai, Liu Rui-jie, Duan Yong, Sun Yu-dong // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. — 2023. — Vol. 202. — 104925. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2023.104925.
85. *Hardy R.L.* Research results in the application of multiquadratic equations to surveying and mapping problems // *Surveying and mapping*. — 1975. — Vol. 35. — P. 321–332. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:128208370>.
86. *Kansa E.J.* Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—I surface approximations and partial derivative estimates // *Computers and Mathematics with Applications*. — 1990. — Vol. 19, no. 8–9. — P. 127–145. DOI: 10.1016/0898-1221(90)90270-t.
87. *Su L.* A radial basis function (RBF)-finite difference (FD) method for the backward heat conduction problem // *Applied Mathematics and Computation*. — 2019. — Vol. 354. — P. 232–247. DOI: 10.1016/j.amc.2019.02.035.
88. *Kansa E.J.* Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations // *Computers and Mathematics with Applications*. — 1990. — Vol. 19, no. 8–9. — P. 147–161. DOI: 10.1016/0898-1221(90)90271-k.

89. *Hsin-Yun Hu, Zi-Cai Li, Cheng Alexander H.D.* Radial basis collocation methods for elliptic boundary value problems // *Computers and Mathematics with Applications*. — 2005. — Vol. 50, no. 1–2. — P. 289–320. DOI: 10.1016/j.camwa.2004.02.014.
90. *Jankowska M.A., Karageorghis A., Chen C.S.* Improved Kansa RBF method for the solution of nonlinear boundary value problems // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2018. — Vol. 87. — P. 173–183. DOI: 10.1016/j.enganabound.2017.11.012.
91. *Aslefallah M., Shivanian E.* An efficient meshless method based on RBFs for the time fractional diffusion-wave equation // *Afrika Matematika*. — 2018. — Vol. 29, no. 7-8. — P. 1203-1214. DOI: 10.1007/s13370-018-0616-y.
92. *Aslefallah M., Shivanian E.* Nonlinear fractional integro-differential reaction diffusion equation via radial basis functions // *The European Physical Journal plus*. — 2015. — Vol. 130, no. 47. — 9 p. DOI: 10.1140/epjp/i2015-15047-y.
93. *Dehghan M., Shokri A.* A numerical method for two-dimensional schrodinger equation using collocation and radial basis functions // *Computers and Mathematics with Applications*. — 2007. — Vol. 54, no. 1. — P. 136–146. DOI: 10.1016/j.camwa.2007.01.038.
94. *Hajiketabi M., Abbasbandy S., Casas F.* The Lie-group method based on radial basis functions for solving nonlinear high dimensional generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation in arbitrary domains // *Applied Mathematics and Computation*. — 2018. — Vol. 321. — P. 223–243. DOI: 10.1016/j.amc.2017.10.051.
95. *Hajiketabi M., Abbasbandy S.* The combination of meshless method based on radial basis functions with a geometric numerical integration method for solving partial differential equations: Application to the heat equation // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2018. — Vol. 87. — P. 36–46. DOI: 10.1016/j.enganabound.2017.11.008.
96. *Akbar Mohebbi, Mostafa Abbaszadeh, Mehdi Dehghan.* The use of a meshless technique based on collocation and radial basis functions for solving the time

- fractional nonlinear Schrödinger equation arising in quantum mechanics // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2013. — Vol. 37, no. 2. — P. 475–485. DOI: 10.1016/j.enganabound.2012.12.002.
97. *Dehghan M., Mohammadi V.* The numerical solution of fokker–planck equation with radial basis functions (RBFs) based on the meshless technique of Kansa’s approach and Galerkin method // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2014. — Vol. 47. — P. 38–63. DOI: 10.1016/j.enganabound.2014.05.004.
98. *Dehghan M., Abbaszadeh M., Mohebbi A.* The numerical solution of nonlinear high dimensional generalized Benjamin–Bona–Mahony–burgers equation via the meshless method of radial basis functions // *Computers and Mathematics with Applications*. — 2014. — Vol. 68, no. 3. — P. 212–237. DOI: 10.1016/j.camwa.2014.05.019.
99. *Griffiths G.W., Płociniczak Ł., Schiesser W.E.* Analysis of cornea curvature using radial basis functions — Part I: Methodology // *Computers in Biology and Medicine*. — 2016. — Vol. 77. — P. 274–284. DOI: 10.1016/j.combiomed.2016.08.011.
100. *Cavoretto R., De Rossi A.* An adaptive LOOCV-based refinement scheme for RBF collocation methods over irregular domains // *Applied Mathematics Letters*. — 2020. — Vol.103. — 106178. DOI: 10.1016/j.aml.2019.106178.
101. *Cavoretto R., De Rossi A.* A two-stage adaptive scheme based on RBF collocation for solving elliptic PDEs // *Computers and Mathematics with Applications*. — 2020. — Vol. 79, no. 11. — P. 3206–3222. DOI: 10.1016/j.camwa.2020.01.018.
102. *Tolstykh A.I.* On using RBF-based differencing formulas for unstructured and mixed structured-unstructured grid calculations // *Proceedings of the 16th IMACS world congress*. — Lausanne, 2000. — P. 4606–4624.
103. *Sarra S.A.* A local radial basis function method for advection–diffusion–reaction equations on complexly shaped domains // *Applied Mathematics and Computation*. — 2012. — Vol. 218, no. 19. — P. 9853–9865. DOI: 10.1016/j.amc.2012.03.062.

104. *Singh V., Islam S., Mohanty R. K.* Local meshless method for convection dominated steady and unsteady partial differential equations // *Engineering with Computers*. — 2018. — Vol. 35, no. 3. — P. 803–812. DOI: 10.1007/s00366-018-0632-4.
105. A local radial basis function collocation method to solve the variable-order time fractional diffusion equation in a two-dimensional irregular domain / S. Wei, W. Chen, Y. Zhang, H. Wei, R.M. Garrard // *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. — 2018. — Vol. 34, no. 4. — P. 1209–1223. DOI: 10.1002/num.22253.
106. *Dehghan M., Mohammadi V.* A numerical scheme based on radial basis function finite difference (RBF-FD) technique for solving the high-dimensional nonlinear schrödinger equations using an explicit time discretization: runge–kutta method // *Computer Physics Communications*. — 2017. — Vol. 217. — P. 23–34. DOI: 10.1016/j.cpc.2017.03.012.
107. *Jalil Rashidinia, Navaz Rasoulizadeh Mohammad.* Numerical methods based on radial basis function-generated finite difference (RBF-FD) for solution of GKdVB equation // *Wave Motion*. — 2019. — Vol. 90. — P. 152–167. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2019.05.006.
108. *Golbabai A., Kalarestaghi N.* Analysis on the upwind local radial basis functions method to solve convection dominated problems and it's application for MHD flow // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2019. — Vol. 100. — P. 59–67. DOI: 10.1016/j.enganabound.2018.03.014.
109. *Dehghan M., Abbaszadeh M.* The use of proper orthogonal decomposition (POD) meshless RBF-FD technique to simulate the shallow water equations // *Computer Physics Communications*. — 2017. — Vol. 351. — P. 478–510. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.09.007.
110. *Mansour Safarpour, Ahmad Shirzadi.* Numerical investigation based on radial basis function–finite-difference (RBF–FD) method for solving the Stokes–Darcy equations // *Engineering with Computers*. — 2019. — Vol. 37, no. 2. — P. 909–920. DOI: 10.1007/s00366-019-00863-5.

111. *Oruç Ömer*. Two meshless methods based on local radial basis function and barycentric rational interpolation for solving 2d viscoelastic wave equation, *Comput. Math. Appl.* doi: 10.1016/j.camwa.2020.01.025.
112. *Oruç Ömer*. A local hybrid kernel meshless method for numerical solutions of two-dimensional fractional cable equation in neuronal dynamics // *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. — 2020. — Vol. 36, no. 6. — P. 1699–1717. DOI: 10.1002/num.22499.
113. *Álvarez D., González-Rodríguez P., Kindelan M.* A Local Radial Basis Function Method for the Laplace–Beltrami Operator // *Journal of Scientific Computing*.— 2021. — Vol. 86, no. 3. — 22 p. DOI: 10.1007/s10915-020-5-3.
114. *Liu Chein-Shan, Liu Dongjie*. Optimal shape parameter in the MQ-RBF by minimizing an energy gap functional // *Applied Mathematics Letters*. — 2018. — Vol. 86. — P. 157–165. DOI: 10.1016/j.aml.2018.06.031.
115. On the role of polynomials in RBF-FD approximations: I. Interpolation and accuracy / N. Flyer, B. Fornberg, V. Bayona, G.A. Barnett // *Journal of Computational Physics*. — 2016. — Vol. 321. — P. 21–38. DOI: 10.1016/j.jcp.2016.05.026.
116. Polyharmonic splines interpolation on scattered data in 2D and 3D with applications / R. Kalani, Y. Guangming, N. Jing, T. Gantumur // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2023. — Vol. 156. — P. 240–250. DOI: 10.1016/j.enganabound.2023.08.001.
117. *Tominec I., Larsson E., Heryudono A.* A Least Squares Radial Basis Function Finite Difference Method with Improved Stability Properties // *SIAM Journal on Scientific Computing*. — 2021. — Vol. 43, no. 2. — P. A1441–A1471. DOI: 10.1137/20M1320079.
118. A Radial Basis Function (RBF)-Finite Difference (FD) method for diffusion and reaction–diffusion equations on surfaces / V. Shankar, G.B. Wright, R.M. Kirby, A.L. Fogelson // *Journal of Scientific Computing*. — 2014. — Vol. 63, no. 3. — P. 745–768. DOI: 10.1007/s10915-014-9914-1.

119. *Asghar R., Shivanian C., Abbasbandy S.* Analysis of new RBF-FD weights, calculated based on inverse quadratic functions // *Journal of Mathematics*. — 2022. — Vol. 2022. — P. 1–7. DOI: 10.1155/2022/3718132.
120. *Freund J., Karakoç A.* Shear and torsion correction factors of Timoshenko beam model for generic cross sections // *Research on Engineering Structures and Materials*. — 2016. — Vol. 2. — P. 19–27. DOI: 10.17515/resm2015.19me0827.
121. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки // Издательство «Наука», 1966. — Т. 41. — 636 с.
122. *Mindlin R. D.* Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates // *Journal of Applied Mechanics*. — 1951. — Vol. 18. — P. 31–38.
123. *Жилин П.А.* Прикладная механика. Основы теории оболочек: учебное пособие. — Санкт-Петербург: Издательство Политехнического университета, 2006. — 160 с.
124. *Cowper G. R.* The shear coefficient in Timoshenko's Beam Theory // *Journal of Applied Mechanics*. — 1966. — Vol. 33, no. 2. — P. 335–340. DOI: 10.1115/1.3625046.
125. *Franco-Villafañe J. A., Méndez-Sánchez R. A.* On the Accuracy of the Timoshenko Beam Theory Above the Critical Frequency: Best Shear Coefficient // *Journal of Mechanics*. — 2016. — Vol. 32, no. 5. — P. 515–518. DOI: 10.1017/jmech.2015.104.
126. *Филин А.П.* Элементы теории оболочек. — 3-е изд. // Ленинград: Стройиздат. Ленинградское отделение, 1987. — 384 с.
127. *Садаков О. С., Щербакова А.О.* Об использовании тензора логарифмической деформации // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика*. — 2014. — Т. 6, № 3. — С. 78–85.
128. *Ляв А.* Математическая теория упругости. — М.: Объединённое научно-техническое издательство, 1935. — 680 с.
129. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости / Под ред. А. И. Лурье, Л. Г. Лойцянского. — М: Гостехиздат, 1948. — 211 с.

130. *Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И.* Линейная теория тонких оболочек. — Ленинград: Политехника, 1991. — 655 с.
131. *Красноруцкий Д.А., Лакиза П.А., Шелевая Д.Р.* Программный комплекс для моделирования механики системы тонких упругих стержней. Краевые задачи и математическое моделирование // 16-я Всероссийская научная конференция с международным участием "Краевые задачи и математическое моделирование". — Издательство КГПИ КемГУ. — 2023. — С. 57–60.
132. *Великанов П.Г., Великанов П.Г., Артюхин Ю.П.* Общая теория ортотропных оболочек. Часть I // Вестник Самарского университета. Серия естественных наук. — 2022. — Т. 28, № 1–2. — С. 46–54. DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-46-54.
133. *Shankar V.* The overlapped radial basis function-finite difference (RBF-FD) method: A generalization of RBF-FD // *Journal of Computational Physics*. — 2017. — Vol. 342. — P. 211–228. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.04.037.
134. *Великанов П.Г., Великанов П.Г., Артюхин Ю.П.* Общая теория ортотропных оболочек. Часть II // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. — 2023. — Т. 28, № 3–4. — С. 40–52. DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-40-52.
135. *Jie Hou, Li Ying, Ying Shihui.* Iterative optimization method for determining optimal shape parameter in RBF-FD method // *Applied Mathematics Letters*. — 2023. — Vol. 145. — 108736. DOI: 10.1016/j.aml.2023.108736.
136. *Fornberg B., Flyer N.* Fast generation of 2-D node distributions for mesh-free PDE discretizations // *Computers and Mathematics with Applications*. — 2015. — Vol. 69, no. 7. — P. 531–544. DOI: 10.1016/j.camwa.2015.01.009.
137. *Lehoucq R.B., Sorensen D.C.* Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* — 1996. — Vol. 17, No. 4. — P. 789–821. doi: 10.1137/S0895479895281484.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Текст программы решения тестовых задач

```

program Fortran
  use IMSL
  use INFOM
  external FCNEQN_L, FCNEQN_N, FCNJAC_L_num, FCNBC, FCNJAC_N_num
  real(8)::TOL, PISTEP, ERREST(6), s, PSAVE, STEPMULT
  integer::isFinal
  logical PRINT
  call InitInput()
  STEPMULT=1.0d0
  NLEFT=3
  NCUPBC=0
  TLEFT=0
  PISTEP=0.0
  IF (LINEAR.AND.(BREAKDOWN.EQ.1))THEN
    TOL=1.0d-6
  ELSE
    TOL=1.0d-2
  END IF
  NINIT=NN+1
  MXGRID=NINIT
  N=6
  LDYINI=N
  LDYFIN=N
  1 PRINT= .FALSE. !.TRUE.
  IF ((LINEAR).AND.(BREAKDOWN.EQ.1)) THEN
    open(1,file='fortranLB.prn', STATUS='unknown')
  ELSE IF ((LINEAR).AND.(BREAKDOWN.EQ.0))THEN
    open(2,file='fortranL.prn', STATUS='unknown')
  ELSE
    open(2,file='fortranN.prn', STATUS='unknown')
  END IF
  IF ((LINEAR).AND.(BREAKDOWN.EQ.1))THEN
    Do NN=3,302
      NINIT=NN+1
      MXGRID=NINIT
      allocate(TINIT(NINIT),YINIT(N,NINIT))
      allocate(TFINAL(MXGRID),YFINAL(N,MXGRID))
    do i=1,NN+1
      TINIT(i)=TLEFT +(i-1.0d0)/NN*(TRIGHT-TLEFT)
      do j=1,N
        YINIT(j,i)=0.0d0
      end do
    end do
    call ERSET(0,0,0)
    CALL DBVPFD (FCNEQN_L, FCNJAC_L_num, FCNBC, FCNEQN_L, FCNBC, N,&
      NLEFT, NCUPBC, TLEFT, TRIGHT, PISTEP, TOL,&
      NINIT, TINIT, YINIT, LDYINI, LINEAR, PRINT,&
      MXGRID, NFINAL, TFINAL, YFINAL, LDYFIN, ERREST)
    write(1,'(1E23.15)')Lt*dsqrt(YFINAL(1,1)**2+YFINAL(2,1)**2)
    end do
    close(1)
  ELSE IF (BREAKDOWN.EQ.0) THEN
    allocate(TINIT(NINIT),YINIT(N,NINIT))
    allocate(TFINAL(MXGRID),YFINAL(N,MXGRID))
  Do i=1,NN+1
    TINIT(i)=TLEFT +(i-1.0d0)/NN*(TRIGHT-TLEFT)
    do j=1,N
      YINIT(j,i)=0.0d0
    end do
  end do
end do

```



```

PP=PMIN
PSAVE=PP
isFinal=0
isConv1=0
Do
Pr=PP*Hs
call ERSET(0,0,0)
IF (LINEAR) THEN
CALL DBVFPD (FCNEQN_L, FCNJAC_L_num, FCNBC, FCNEQN_L, FCNBC, N,&
NLEFT, NCUPBC, TLEFT, TRIGHT, PISTEP, TOL,&
NINIT, TINIT, YINIT, LDYINI, LINEAR, PRINT,&
MXGRID, NFINAL, TFINAL, YFINAL, LDYFIN, ERREST)
ELSE
CALL DBVFPD (FCNEQN_N, FCNJAC_N_num, FCNBC, FCNEQN_N, FCNBC, N,&
NLEFT, NCUPBC, TLEFT, TRIGHT, PISTEP, TOL,&
NINIT, TINIT, YINIT, LDYINI, LINEAR, PRINT,&
MXGRID, NFINAL, TFINAL, YFINAL, LDYFIN, ERREST)
END IF
ICODE = IERCD( )
ITYPE = N1RTY(1)
if(ICODE.ne.0)then
PP=PSAVE
if(NUMOFDIV>0)then
NUMOFDIV=NUMOFDIV-1
STEPMULT=STEPMULT/2.0d0
PP=PP+PSTEP*STEPMULT
else
if(isConv1.eq.0.or.isFinal>0)exit
isFinal=1
end if
cycle
end if
isConv1=1
print *,PP
write(2, '(3E23.15)')PP,Lt*YFINAL(1,1),Lt*dsqrt(YFINAL(1,1)**2+YFINAL(2,1)**2)
Do i=1,N
do j=1,NN
YINIT(i,j)=YFINAL(i,j)
!YINIT(i,j)=0
end do
End do
open(3,file='res2.prn',STATUS='unknown')
do i=1,NFINAL
s=TFINAL(i)
write(3, '(8E23.15)')s,YFINAL(1,i),YFINAL(2,i),YFINAL(3,i),YFINAL(4,i),YFINAL(5,
i),YFINAL(6,i)
end do
close(3)
PSAVE=PP
PP=PP+PSTEP*STEPMULT
if(PP>PMAX.or.isFinal>0)exit
end do
close(1)
close(2)
open(4,file='res.prn',STATUS='unknown')
do i=1,NFINAL
s=TFINAL(i)
write(4, '(8E23.15)')s,Lt*(r(s)+YFINAL(1,i)),Lt*(z(s)+YFINAL(2,i)),Lt*YFINAL(3,i
),Lt*r(s),Lt*z(s),qr(s,YFINAL(3,i)),qz(s,YFINAL(3,i))
end do
close(4)
END IF
end program Fortran

```

```

subroutine FCNEQN_N (N, x, Y, Par, DYDT)
  use INFOM
  integer::N
  real(8)::x,Y(1),Par,DYDT(1)
  real(8)::rs_,zs_,r_,eps2,eps1h,eps1,fh,dxis,TE,TE1,TE2,TE3
  real(8)::sindx,cosdx,T1fi,E1,E2,eps1_,eps2_
  rs_=rs(x)
  zs_=zs(x)
  r_=r(x)
  rss_=rss(x)
  zss_=zss(x)
  dxis=ds(x)
  k2=Lt**2*(zss_*rs_-rss_*zs_)*dxis**3
  sindx=dsin(Y(3))
  cosdx=dcos(Y(3))
  E1=Y(1)/r_+1.0d0
  eps1=dlog(E1)
  fh=1.0d0
  if(css>0)then ! cross section scaling
    iter=0
    TE1=-nu*eps1
    TE2=Lt*dxis*((rs_*cosdx-zs_*sindx)*Y(4)+(zs_*cosdx+rs_*sindx)*Y(5))
    TE3=nu/(nu-1)
    TE=fh
    do iter=1,10
      eps2=TE1+TE2/fh
      fh=dexp(TE3*(eps1+eps2))
      if(dabs(fh-TE)<1.0d-6)exit
      TE=fh
    end do
  end if
  E2=dexp(eps2)
  T1fi=fh*(eps1+nu*eps2)
  eps1_=(E1-1.0d0)/E1
  eps2_=(E2-1.0d0)/E2
  DYDT(1)=-E2*zs_*sindx+E2*rs_*cosdx-rs_
  eps1h=(Y(1)*rs_-r_*DYDT(1))/r_**2
  DYDT(2)=E2*rs_*sindx+E2*zs_*cosdx-zs_
  DYDT(3)=(-1.0d0/(fh**3*Lt*h*dxis*(1+eps2_)))*Y(6)&
    &-(nu/r_)*((1.0d0+eps1_)/(1.0d0+eps2_))*(zs_*cosdx+rs_*sindx)&
    &+(nu/(1.0d0+eps2_))*(zs_/r_)-(k2*eps2_)/(dxis*(1+eps2_))
  TE1=-(r_*eps1h+rs_*E1)/(r_*E1)
  TE2=(E2*(nu**2-1.0d0))/(Lt*dxis*E*h)
  DYDT(4)=TE1*Y(4)+TE2*qr(x,Y(3))/Hs+T1fi*E2/(Lt*r_*dxis*E1)
  DYDT(5)=TE1*Y(5)+TE2*qz(x,Y(3))/Hs
  TE3=(h*Lt*E2*dxis*(1.0d0-nu**2)/(r_**2*E1))*rs_*fh**3
  DYDT(6)=(-rs_*sindx-zs_*cosdx)*(E2*12*Y(4)/h)+(-
  zs_*sindx+rs_*cosdx)*(E2*12*Y(5)/h)&
    &+((nu*E2/E1-1.0d0)*(rs_/r_)-eps1h/E1)*Y(6)&
    &+TE3*zs_*(1.0d0-(1+eps1_)*cosdx)-TE3*(1+eps1_)*rs_*sindx
end subroutine
subroutine FCNEQN_L (N, x, Y, Par, DYDT)
  use INFOM
  integer::N
  real(8)::x,Y(1),Par,DYDT(1)
  real(8)::rs_,zs_,r_,eps2,eps1,dxis,T1fi
  rs_=rs(x)
  zs_=zs(x)
  r_=r(x)
  dxis=ds(x)
  eps1=Y(1)/r_
  eps2=-nu*eps1+Lt*dxis*(rs_*Y(4)+zs_*Y(5))
  T1fi= eps1+nu*eps2
  DYDT(1)=-zs_*Y(3)+eps2*rs_
  DYDT(2)=rs_*Y(3)+eps2*zs_

```

```

DYDT(3)=(-1.0d0/(Lt*h*dxis))*Y(6)-nu*(rs_/r_)*Y(3)
DYDT(4)=(-rs_/r_)*Y(4)-(1.0d0/(Lt*dxis))*qr(x,Y(3))+T1fi/(Lt*r_*dxis)
DYDT(5)=(-rs_/r_)*Y(5)-(1.0d0/(Lt*dxis))*qz(x,Y(3))
DYDT(6)=((nu-1.0d0)*rs_/r_)*Y(6)-(12/h)*(zs_*Y(4)-rs_*Y(5))&
        &-Lt*dxis*h*(1.0d0-nu**2)*(rs_**2/r_**2)*Y(3)
end subroutine
subroutine FCNJAC_N_num (N, x, Y, Par, DYDPDY)
  use INFOM
  integer::N
  real(8)::x,Y(1),DYDPDY(N,N),Par,DYDT(N),DYDT1(N)
  real(8)::deps=1d-9
  call FCNEQN_N (N, x, Y, Par, DYDT)
  do i=1,6
    Y(i)=Y(i)+deps
    call FCNEQN_N (N, x, Y, Par, DYDT1)
    Y(i)=Y(i)-deps
    do j=1,6
      DYDPDY(j,i)=(DYDT1(j)-DYDT(j))/deps
    end do
  end do
end subroutine
subroutine FCNJAC_L_num (N, x, Y, Par, DYDPDY)
  use INFOM
  integer::N
  real(8)::x,Y(1),DYDPDY(N,N),Par,DYDT(N),DYDT1(N)
  real(8)::deps=1d-9
  call FCNEQN_L (N, x, Y, Par, DYDT)
  do i=1,6
    Y(i)=Y(i)+deps
    call FCNEQN_L (N, x, Y, Par, DYDT1)
    Y(i)=Y(i)-deps
    do j=1,6
      DYDPDY(j,i)=(DYDT1(j)-DYDT(j))/deps
    end do
  end do
end subroutine

```

```

! Сферическая оболочка
module INFOM
  real(8)::h,nu,dR,Pr,PP,Hs,Pi,h1
  real(8)::R0,E,Lt,TLEFT,TRIGHT
  real(8),pointer::TINIT(:),YINIT(:,:),TFINAL(:),YFINAL(:,:)
  integer::NN,NUMOFDIV
  real(8)::PMIN,PMAX,PSTEP
  integer::MXGRID,mass_save=0,EPSMODE=0
  integer::css=1
  Logical::LINEAR=.FALSE.
  integer::BREAKDOWN=0
end module
subroutine InitInput()
  use INFOM
  dR=1.0d-12
  Pi=dacos(-1.0d0)
  R0=0.5d0
  nu=0.3d0
  E=2.0d7
  h1 = 0.02d0
  Lt=(Pi/2.0d0)*R0
  h=h1/Lt
  Hs=(1-nu**2)/(E*h)
  NN=1000
  TRIGHT=Pi/2.0d0
  IF (BREAKDOWN.EQ.1)THEN
    PP=1.0d5
  
```

```

        Pr=PP*Hs
ELSE
    PMIN=0.0d0
    PMAX=5.5d5
    PSTEP=1.0d4
    NUMOFDIV=1
END IF
End subroutine
real(8) function r(x)
    use INFOM
    real(8)::x
    r=R0*dcos(x)/Lt+dR
end function
real(8) function rs(x)
    use INFOM
    real(8)::x
    rs=-R0*dsin(x)/Lt
end function
real(8) function z(x)
    use INFOM
    real(8)::x
    z=R0*dsin(x)/Lt
end function
real(8) function zs(x)
    use INFOM
    real(8)::x
    zs=R0*dcos(x)/Lt
end function
real(8) function rss(x)
    use INFOM
    real(8)::x
    rss=-R0*dcos(x)/Lt
end function
real(8) function zss(x)
    use INFOM
    real(8)::x
    zss=-R0*dsin(x)/Lt
end function
real(8) function qr(x,hi)
    use INFOM
    real(8)::x,hi
    qr=Pr*dcos(x)*dcos(hi)-Pr*dsin(x)*dsin(hi)
end function
real(8) function qz(x,hi)
    use INFOM
    real(8)::x,hi
    qz=Pr*dcos(x)*dsin(hi)+Pr*dsin(x)*dcos(hi)
end function
real(8) function ds(x)
    use INFOM
    real(8)::x,rs_,zs_
    rs_=rs(x)
    zs_=zs(x)
    ds=1.0d0/(Lt*dsqrt(rs_**2+zs_**2))
end function
subroutine FCNBC (N, YLEFT, YRIGHT, Par, RES)
    use INFOM
    real(8)::YLEFT(1),YRIGHT(1),Par,RES(1)
    RES(1)= YLEFT(2)
    RES(2)= YLEFT(3)
    RES(3)= YLEFT(4)
    RES(4)= YRIGHT(1)
    RES(5)= YRIGHT(3)
    RES(6)= YRIGHT(5)
end subroutine

```

```
! Эллиптическая оболочка
```

```

module INFOM
  real(8)::h, nu, dR, Pr, Hs, a, b, Pi, h1, PP
  real(8)::R0, E, Lt, TLEFT, TRIGHT
  real(8), pointer::TINIT(:), YINIT(:, :), TFINAL(:), YFINAL(:, :)
  integer::NN, MXGRID, NUMOFDIV
  real(8)::PMIN, PMAX, PSTEP
  integer::css=1
  Logical::LINEAR=.FALSE.
  integer::BREAKDOWN=0
end module
subroutine InitInput()
  use INFOM
  Pi=dacos(-1.0d0)
  nu=0.3d0
  E=2.0d7
  h1 = 0.02d0
  dR=1.0d-12
  a = 0.4d0
  b = 2*a
  Lt=0.25*Pi*(a+b)*(1+(3*((a-b)/(a+b))**2)/(10+dsqrt(4-3*((a-b)/(a+b))**2)))
  h=h1/Lt
  Hs=(1-nu**2)/(E*h)
  NN = 1000
  TRIGHT=Pi/2.0d0
  IF (BREAKDOWN.EQ.1)THEN
    PP=1.0d5
    Pr=PP*Hs
  ELSE
    PMIN=0.0d0
    PMAX=4.25d5
    PSTEP=1.0d4
    NUMOFDIV=3
  END IF
end subroutine
real(8) function r(x)
  use INFOM
  real(8)::x
  r=a*dcos(x)/Lt+dR
end function
real(8) function rs(x)
  use INFOM
  real(8)::x
  rs=-a*dsin(x)/Lt
end function
real(8) function z(x)
  use INFOM
  real(8)::x
  z=b*dsin(x)/Lt
end function
real(8) function zs(x)
  use INFOM
  real(8)::x
  zs=b*dcos(x)/Lt
end function
real(8) function rss(x)
  use INFOM
  real(8)::x
  rss=-a*dcos(x)/Lt
end function
real(8) function zss(x)
  use INFOM
  real(8)::x
  zss=-b*dsin(x)/Lt
end function

```

```

real(8) function qr(x,hi)
  use INFOM
  real(8)::x,hi
  IF (LINEAR) THEN
    qr=Pr*b*dcos(x)/(dsqrt(b**2*dcos(x)**2+a**2*dsin(x)**2))
  ELSE
    qr=(Pr*b*dcos(x)*dcos(hi)-
Pr*a*dsin(x)*dsin(hi))/(dsqrt(b**2*dcos(x)**2+a**2*dsin(x)**2))
  END IF
end function
real(8) function qz(x,hi)
  use INFOM
  real(8)::x,hi
  IF (LINEAR) THEN
    qz=Pr*a*dsin(x)/(dsqrt(b**2*dcos(x)**2+a**2*dsin(x)**2))
  ELSE
    qz=(Pr*b*dcos(x)*dsin(hi)+Pr*a*dsin(x)*dcos(hi))/(dsqrt(b**2*dcos(x)**2+a**2*dsi
n(x)**2))
  END IF
end function
real(8) function ds(x)
  use INFOM
  real(8)::x,rs_,zs_
  rs_=rs(x)
  zs_=zs(x)
  ds=1.0d0/(Lt*dsqrt(rs_**2+zs_**2))
end function
subroutine FCNBC (N, YLEFT, YRIGHT, Par, RES)
  use INFOM
  real(8)::YLEFT(1),YRIGHT(1),Par,RES(1)
  RES(1)= YLEFT(2)
  RES(2)= YLEFT(3)
  RES(3)= YLEFT(4)
  RES(4)= YRIGHT(1)
  RES(5)= YRIGHT(3)
  RES(6)= YRIGHT(5)
end subroutine

```

```

! Коническая оболочка
module INFOM
  real(8)::h,nu,dR,Hs,Pr,h1,phi
  real(8)::R0,E,Lt,TLEFT,TRIGHT
  real(8),pointer::TINIT(:),YINIT(:,:),TFINAL(:),YFINAL(:,:)
  integer::css=1 ! cross section scaling
  integer::NN,NUMOFDIV
  real(8)::PMIN,PMAX,PSTEP,PP
  Logical::LINEAR=.FALSE.
  integer::BREAKDOWN=0
end module
subroutine InitInput()
  use INFOM
  Pi=dacos(-1.0d0)
  phi=Pi/6.0d0
  dR=1.0d-12
  nu=0.3d0
  E=2.0d7
  h1=0.02d0
  R0=0.5d0
  Lt=R0/dsin(phi)
  h=h1/Lt
  Hs=(1-nu**2)/(E*h)
  NN=1000
  TRIGHT=1.0d0
  IF (BREAKDOWN.EQ.1)THEN
    PP=1.0d5

```

```

        Pr=PP*Hs
ELSE
    PMIN=0.0d0
    PMAX=6.05d5
    PSTEP=1.0d4
    NUMOFDIV=1
END IF
end subroutine
real(8) function r(x)
    use INFOM
    real(8)::x
    r=R0*x/Lt+dR
end function
real(8) function rs(x)
    use INFOM
    real(8)::x
    rs=R0/Lt
end function
real(8) function z(x)
    use INFOM
    real(8)::x
    z=(Lt-x)/Lt*R0/dtan(phi)
end function
real(8) function zs(x)
    use INFOM
    real(8)::x
    zs=-R0/(Lt*dtan(phi))
end function
real(8) function rss(x)
    use INFOM
    real(8)::x
    rss=0
end function
real(8) function zss(x)
    use INFOM
    real(8)::x
    zss=0
end function
real(8) function qr(x,hi)
    use INFOM
    real(8)::x,hi
    if(LINEAR)then
        qr=Pr*dcos(phi)
    else
        qr=Pr*dcos(phi)*dcos(hi)-Pr*dsin(phi)*dsin(hi)
    end if
end function
real(8) function qz(x,hi)
    use INFOM
    real(8)::x,hi
    if(LINEAR)then
        qz=Pr*dsin(phi)
    else
        qz=Pr*dsin(phi)*dcos(hi)+Pr*dcos(phi)*dsin(hi)
    end if
end function
real(8) function ds(x)
    use INFOM
    real(8)::x,rs_,zs_
    rs_=rs(x)
    zs_=zs(x)
    ds=1.0d0/(Lt*dsqrt(rs_**2+zs_**2))
end function
subroutine FCNBC (N, YLEFT, YRIGHT, Par, RES)
    use INFOM

```

```

real(8)::YLEFT(1),YRIGHT(1),Par,RES(1)
RES(1)= YLEFT(1)
RES(2)= YLEFT(3)
RES(3)= YLEFT(5)
RES(4)= YRIGHT(1)
RES(5)= YRIGHT(2)
RES(6)= YRIGHT(3)
end subroutine

```

```

! Составная оболочка
module INFOM
real(8)::h,nu,Pr,P1,Hs,phi,H1,Pi
real(8)::R0,E,Lt,L,TLEFT,TRIGHT
real(8),pointer::TINIT(:),YINIT(:,:),TFINAL(:),YFINAL(:,:)
integer::NN,NUMOFDIV
real(8)::PMIN,PMAX,PSTEP
integer::css=1
Logical::LINEAR=.FALSE.
integer::BREAKDOWN=0
end module
subroutine InitInput()
use INFOM
Pi=dacos(-1.0d0)
phi=Pi/6.0d0
R0=0.5d0
H1 = 0.8d0
L = 0.3d0
nu=0.3d0
E=2.0d7
Lt=L+H1
h=0.02d0/Lt
Hs=(1-nu**2)/(E*h)
NN=1000
TRIGHT=Lt
IF (BREAKDOWN.EQ.1)THEN
PP=1.0d5
Pr=PP*Hs
ELSE
PMIN=0.0d0
PMAX=5.0d5
PSTEP=1.0d4
NUMOFDIV=1
END IF
End subroutine
real(8) function r(x)
use INFOM
real(8)::x
if (x.GE.0.AND.x.LE.L) Then
r=(R0-(L-x)*dsin(phi))/Lt
else
r=R0/Lt
end if
end function
real(8) function rs(x)
use INFOM
real(8)::x
if (x.GE.0.AND.x.LE.L) Then
rs=dsin(phi)/Lt
else
rs=0
end if
end function
real(8) function z(x)
use INFOM
real(8)::x

```



```

    if (x.GE.0 .AND. x.LE.L) Then
      z=(H1+(L-x)*dcos(phi))/Lt
    else
      z=H1/Lt-(x-L)/Lt
    end if
end function
real(8) function zs(x)
  use INFOM
  real(8)::x
  if (x.GE.0 .AND. x.LE.L) Then
    zs=-dcos(phi)/Lt
  else
    zs=-1.0d0/Lt
  end if
end function
real(8) function rss(x)
  use INFOM
  real(8)::x
  if (x.GE.0.AND.x.LE.L) Then
    rss=dcos(phi)/Lt
  else
    rss=0
  end if
end function
real(8) function zss(x)
  use INFOM
  real(8)::x
  if (x.GE.0 .AND. x.LE.L) Then
    zss=dsin(phi)/Lt
  else
    zss=0
  end if
end function
real(8) function qr(x,hi)
  use INFOM
  real(8)::x,hi
  if (x.GE.0.AND.x.LE.L) Then
    IF (LINEAR) THEN
      qr=Pr*dcos(phi)
    ELSE
      qr=Pr*dcos(phi)*dcos(hi)-Pr*dsin(phi)*dsin(hi)
    END IF
  else
    IF (LINEAR)THEN
      qr=Pr
    ELSE
      qr=Pr*dcos(hi)
    END IF
  end if
end function
real(8) function qz(x,hi)
  use INFOM
  real(8)::x,hi
  if (x.GE.0.AND.x.LE.L) Then
    IF (LINEAR)THEN
      qz=Pr*dsin(phi)
    ELSE
      qz=Pr*dcos(phi)*dsin(hi)+Pr*dsin(phi)*dcos(hi)
    END IF
  else
    IF (LINEAR)THEN
      qz=0
    ELSE
      qz=Pr*dsin(hi)
    END IF
  end if
end function

```

```
end if
end function
real(8) function ds(x)
  use INFOM
  real(8)::x,rs_,zs_
  rs_=rs(x)
  zs_=zs(x)
  ds=1.0d0/(Lt*dsqrt(rs_**2+zs_**2))
end function
subroutine FCNBC (N, YLEFT, YRIGHT, Par, RES)
  use INFOM
  real(8)::YLEFT(1),YRIGHT(1),Par,RES(1)
  RES(1)= YLEFT(4)
  RES(2)= YLEFT(5)
  RES(3)= YLEFT(6)
  RES(4)= YRIGHT(1)
  RES(5)= YRIGHT(2)
  RES(6)= YRIGHT(3)
end subroutine
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
Скрипты APDL тестовых задач

Таблица Б.1

Макрос ядра для решения тестовых задач на языке APDL

| | |
|---|--|
| <pre> FINISH /CLEAR,START /UNITS,SI /nerr,0,,,0 /uis,msgpop,3 START = 5 FINAL = 100 *do,E_TYPE,1,3 LEVEL=1 GEOMETRY='UGL1' *Do,VARIN,START,FINAL,1 PARSAV, ALL, Temp, txt /CLEAR,NOSTART PARRES, CHANGE, Temp, txt /PREP7 *ABBR,RELOAD,/INPUT,core,for *USE,GEOMETRY *if,E_TYPE,EQ,1,then ET,1,SHELL181 SECTYPE,,SHELL SECDATA,h fileadd='_181' *elseif,E_TYPE,EQ,2,then ET,1,SHELL43 R,1,h,h,h,h fileadd='_43' *elseif,E_TYPE,EQ,3,then ET,1,SHELL93 R,1,h,h,h,h,h fileadd='_93' *endif MP,EX,1,2E7 MP,PRXY,1,0.3 MP,DENS,1,7850 AMESH,ALL *if,CLAMPED,eq,1,then NSEL,S,LOC,Y,0 D,ALL,ALL,0 *else </pre> | <pre> NSEL,S,LOC,Y,0 D,ALL,UY,0 D,ALL,ROTX,0 D,ALL,ROTZ,0 *endif NSEL,S,LOC,X,0 D,ALL,UX,0 D,ALL,ROTY,0 D,ALL,ROTZ,0 NSEL,S,LOC,Z,0 D,ALL,UZ,0 D,ALL,ROTX,0 D,ALL,ROTY,0 ALLSEL,ALL SFA,ALL,,PRES,PRESSURE /SOLU ANTYPE,STATIC NLGEOM,ONLIN SOLVE *if,ONLIN,ne,0,then *GET, isConverged, ACTIVE, 0, SOLU, CNVG *else isConverged=1 *endif *if,isConverged,eq,1,then /POST1 PLDISP,1 n_num=NODE(X0,Y0,0) *GET,Summ,NODE,n_num,U,SUM *cfdopen,%filename%%fileadd%,prn,,APPEND *vwrite,VAROUT,Summ %i %G *cfclos *else LEVEL=LEVEL+1 *endif *enddo *USE,'PrintForm.for' *enddo </pre> |
|---|--|

Таблица Б.2

Макрос построения геометрии цилиндрической оболочки CYL0

| | |
|---|---|
| H_ = 0.7 R = 0.5 K,1,0,0,0 K,2,0,0.01,0 K,3,R,0,0 K,4,R,H_,0 | L,3,4 AROTAT,1,,,,,1,2,90,1 AESIZE,1,H_/NN X0=R Y0=H_ |
|---|---|

Таблица Б.3

Макрос построения геометрии сферической оболочки SPH0

| | |
|---|---|
| PI=acos(-1) radi=0.5 Le=PI*radi/2 K,1,0,0,0 K,2,0,-0.2,0 K,3,0,0,0.1 CIRCLE,1,radi,2,,90, | AROTAT,1,,,,,1,5,90,1 LESIZE,1,,,NN, LESIZE,2,,,NN, LESIZE,3,,,NN, ESIZE,Le/NN X0=0 Y0=radi |
|---|---|

Таблица Б.4

Макрос построения геометрии эллиптической оболочки ELI0

| | |
|---|---|
| a=0.4 b=2*a K,1,0,0,0 K,2,0,0,0.1 K,3,0.1,0.1 K,4,0,0,0.1 K,5,0.1,0,0 K,6,0,0.01,0 | CIRCLE,1,a,2,5,90,1 LSSCALE,1,,,1,b/a,1,,,1 AROTAT,1,,,,,1,6,90,1 LESIZE,1,,,NN, LESIZE,2,,,NN, LESIZE,3,,,NN, X0=a Y0=0 |
|---|---|

Таблица Б.5

Макрос построения геометрии конической оболочки CON0

| | |
|--|--|
| PI = ACOS(-1) Alpha = PI/6 radi = 0.5 c = cos(Alpha) s = sin(Alpha) tg= tan(Alpha) hh=radi/tg iter = 90 L=PI*radi/2 K,1,0,0,0 | K,2,0,0.01,0 K,3,radi,0,0 K,4,0,radi/tg, L,3,4 AROTAT,1,,,,,1,2,iter,NN AESIZE, ALL,L/NN, ESIZE,radi/(s*NN) X0=0 Y0=hh |
|--|--|

Таблица Б.6

Макрос построения геометрии цилиндрической оболочки UGL0

| | |
|--|--|
| Alpha = ACOS(-1)/6 s=sin(Alpha) c=cos(Alpha) L = 0.3 H_ = 0.8 R = 0.5 K,1,0,0,0 K,2,0,0.01,0 K,3,0.5,0,0 | K,4,R,H_,0 K,5,(R-L*s),(H_+L*c) L,3,4 L,4,5 AROTAT,1,2,,,,,1,2,90,NN ESIZE,(H_+L)/(NN-1) X0=(R-L*s) Y0=(H_+L*c) |
|--|--|

Таблица Б.7

Макрос управления при варьировании дискретизации составной оболочки UGL1

| | |
|--|---|
| filename='UGL1' NN=VARIN h=0.02 *USE,'UGL0' | PRESSURE=1*1e5 VAROUT=VARIN NONLIN=1 CLAMPED=1 |
|--|---|

Таблица Б.8

Макрос управления при варьировании нагрузки составной оболочки UGL2

| | |
|---|---|
| filename='UGL2' NN=50 h=0.02 *USE,'UGL0' !NROPT,FULL,,ON *if,VARIN,eq,START,then PRESSURE=1e4 P0=PRESSURE *else | *if,isConverged,ne,0,then P0=PRESSURE *endif PRESSURE=P0+5e3/LEVEL *endif VAROUT=PRESSURE NONLIN=1 CLAMPED=1 |
|---|---|

