

На правах рукописи



**Нгуен Мань Кьонг**

**МЕТОДИКА РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКОГО И ДИНАМИЧЕСКОГО  
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ**

Специальность 2.5.14 – «Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов»

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени

кандидата технических наук

Новосибирск – 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский государственный технический университет».

Научный руководитель: кандидат технических наук, доцент  
**Красноруцкий Дмитрий Александрович**

Официальные оппоненты: **Григорьев Валерий Георгиевич**  
Доктор технических наук, старший научный сотрудник,  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский авиационный институт (национальный  
исследовательский университет)», профессор кафедры  
602 «Проектирование и прочность авиационно-ракетных  
и космических изделий»

**Лекомцев Сергей Владимирович**  
Кандидат физико-математических наук, Федеральное  
государственное бюджетное учреждение науки  
«Пермский федеральный исследовательский центр  
Уральского отделения Российской академии наук»,  
заведующий Лабораторией механики функциональных  
материалов

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Новосибирский национальный исследовательский  
государственный университет» (Новосибирский  
государственный университет, НГУ)

Защита состоится «09» июля 2024 года в 16<sup>00</sup> часов на заседании диссертационного  
совета 24.2.347.03, созданного на базе Федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего образования «Новосибирский  
государственный технический университет» по адресу: 630073, г. Новосибирск,  
проспект К. Маркса, 20, I корпус, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного  
технического университета, а также на официальном сайте:

[https://www.nstu.ru/science/dissertation\\_sov/dissertations/view?id=20161](https://www.nstu.ru/science/dissertation_sov/dissertations/view?id=20161)

Автореферат разослан «    » мая 2024 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
канд. техн. наук, доцент



Тюрин Андрей Геннадиевич

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы исследования

Самыми распространёнными структурными единицами авиационной и ракетно-космической техники являются тонкостенные элементы (оболочки). Математические модели конструкций летательных аппаратов, создаваемые для анализа напряжённо-деформированного состояния, сопровождают все этапы их жизненного цикла от эскизного проектирования до эксплуатации. В частности, при создании ракет-носителей (РН) с жидкостным ракетным двигателем, анализ математической модели необходим для решения задачи обеспечения продольной устойчивости на активном участке полёта. Возмущение от тяги двигателя через корпус РН передаётся жидкостным бакам, это приводит к изменению давления в топливной системе и тяги двигателя. Образуется замкнутый контур, который при неблагоприятном сочетании частот собственных колебаний может привести к автоколебаниям типа «пого» и разрушению. Баки с топливом, обычно представляющие собой большие тонкостенные тела вращения (осесимметричные оболочки), составляют 85–90 % от стартовой массы и вносят определяющий вклад в динамику РН. Поэтому необходимо создавать их математические модели для принятия мер по отстройке потенциально опасных частот и предотвращения автоколебаний.

Анализ публикаций по методикам расчёта частот гидроупругих колебаний баков показывает, что существующие подходы при всём многообразии не обладают единством получаемых результатов даже на тестовых задачах. В связи с этим актуальным является создание новой методики расчёта осесимметричных гидроупругих колебаний оболочек вращения на основе современных численных методов. Она может использоваться для обеспечения прочности объектов ракетно-космической техники, в частности, для создания механических аналогов топливных баков при решении задачи о продольной устойчивости РН, а также для тестирования существующих и новых подходов к расчёту.

### Степень разработанности темы исследования

Тема анализа напряжённо-деформированного состояния оболочек достаточно хорошо разработана мировым научным сообществом, имеется множество вариантов систем уравнений и способов их решения, обладающих своими преимуществами и недостатками. Классические модели теории оболочек построены на гипотезе Кирхгофа – Лява. Большой вклад в развитие классических моделей внесли советские ученые: Власов В.З., Гольденвейзер А.Л., Лурье А.И., Муштари Х.М., Новожилов В.В., Работнов Ю.Н., Филин А.П., Бидерман В.Л., Биргер И.А. и др. Неклассическими теориями оболочек занимались: Тимошенко С.П., Рейснер Э., Жилин П.А., Баженов В.Г., Болотин В.В., Аннин Б.Д., Григолюк Э.И., Паймушин В.Н., Черных К.Ф., Балабух Л.И., Абросимов Н.А., Вольмир А.С., Немировский Ю.В. и др.

Для определения динамических характеристик тонкостенных конструкций с жидкостью проводят экспериментальные и численные исследования. Существует множество подходов к расчёту: точные решения для частных случаев геометрии и граничных условий, приближённые методы оценки на основе усеченного разложения решения по некоторому базису, интегральные подходы на основе минимизации функционалов энергий, в том числе варианты метода конечных элементов (МКЭ),

метода граничных элементов (МГЭ) и др. В разработку теорий и методов расчёта колебаний тел с жидкостью внесли вклад: Жуковский Н.Е., Колесников К.С., Моисеев Н.Н., Рабинович Б.И., Румянцев В.В., Луковский И.А., Балакирев Ю.Г., Шмаков В.П., Stokes С., Лампер Р.Е., Abramson Н.Н., Bauer Н.Ф., Miles Y.W., Мокеев В.В., Богоряд И.Б., Шклярчук Ф.Н., Григорьев В.Г., Пожалостин А.А., Левин В.Е., Бочкарёв С.А., Лекомцев С.В., Грибков В.А. и др.

### **Цель диссертационной работы**

Разработать методику расчёта деформирования осесимметричных оболочек вращения, в том числе взаимодействующих с идеальной несжимаемой жидкостью, основанную на современных численных методах и предназначенную для моделирования продольных колебаний топливных баков ракет-носителей, чтобы обеспечить их прочность.

### **Задачи исследования**

1. Получить уравнения статического и динамического осесимметричного деформирования оболочек вращения на основе разрешающих функций в глобальной системе координат с учётом больших деформаций, эффекта утонения и поперечного сдвига.

2. Разработать методику расчёта осесимметричных колебаний ортотропных оболочек вращения с идеальной несжимаемой жидкостью, для моделирования гидроупругих колебаний топливных баков с произвольной формой меридиана и возможностью подкрепления упругими шпангоутами с дополнительными массами.

3. Провести тестирование предложенной методики и исследовать сходимость получаемых результатов расчёта статического деформирования, а также частот гидроупругих колебаний моделей баков.

### **Научная новизна**

1. Получены новые дифференциальные уравнения осесимметричного статического и динамического деформирования ортотропных оболочек вращения на основе разрешающих функций в глобальной системе координат, учитывающие утонение/утолщение при больших деформациях и поперечный сдвиг по типу модели Тимошенко.

2. Разработана новая методика расчёта осесимметричных колебаний ортотропных оболочек вращения с идеальной несжимаемой жидкостью методом конечных разностей, в котором для генерирования весовых коэффициентов аппроксимации уравнения Лапласа и граничных условий на произвольном трафарете (шаблоне) узловых точек используется сплайн-интерполяция на основе полигармонических радиальных базисных функций.

3. В результате исследования корректности и сходимости предложенной методики получены новые расчётные данные — частоты гидроупругих осесимметричных колебаний оболочек вращения, которые могут быть использованы другими исследователями для анализа достоверности существующих и новых подходов к расчёту.

### **Теоретическая и практическая значимость**

Теоретическую значимость представляет предлагаемый подход к построению кинематических соотношений и уравнений равновесия оболочек на основе представления разрешающих функций в глобальной системе координат с

использованием вектора конечного поворота (вектора Эйлера), что позволяет учитывать произвольную начальную геометрию срединной поверхности (с изломами и скачками кривизны), а также учесть влияние поперечного сдвига без использования в уравнениях пространственных производных второго порядка и ввода дополнительных разрешающих функций.

Практическая значимость разработанной методики расчёта механики осесимметричных колебаний ортотропных оболочек вращения с идеальной несжимаемой жидкостью состоит в возможности моделировать продольные гидроупругие колебания связки топливных баков ракетно-космической техники с учётом подкреплений шпангоутами и дополнительными массами от агрегатов. Частоты и формы колебаний необходимы для построения механических аналогов баков, которые включаются в общую динамическую модель всего аппарата, используемую для обеспечения его прочности.

### **Методология и методы исследования**

При выводе дифференциальных уравнений использовалась классическая теория оболочек, с добавлением элементов неклассической теории Тимошенко. Численное решение получено классическим методом конечных разностей, а также его современной разновидностью, называемой Radial Basis Function–Finite Difference (RBF-FD), в которой весовые коэффициенты аппроксимации дифференциальных операторов на произвольном трафарете (шаблоне) определяются с помощью сплайн-интерполяции радиальными базисными функциями.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Система дифференциальных уравнений осесимметричного статического и динамического деформирования ортотропных оболочек вращения на основе разрешающих функций в глобальной системе координат, учитывающая утонение/утолщение при больших деформациях и поперечный сдвиг по типу модели Тимошенко.

2. Методика расчёта осесимметричных колебаний ортотропных оболочек вращения с идеальной несжимаемой жидкостью методом конечных разностей, в котором для генерирования весовых коэффициентов аппроксимации дифференциальных операторов на произвольном трафарете узловых точек используется сплайн-интерполяция на основе полигармонических радиальных базисных функций, предназначенная для моделирования продольных гидроупругих колебаний связки топливных баков ракетно-космической техники с учётом подкреплений шпангоутами и дополнительными массами от агрегатов.

3. Результаты исследования корректности предложенной методики на примерах решения тестовых задач статического деформирования оболочек вращения разной геометрической формы под действием внутреннего давления, а также расчётов частот и форм гидроупругих осесимметричных колебаний некоторых топливных баков.

### **Степень достоверности и апробация результатов работы**

Достоверность полученных результатов работы подтверждается хорошим соответствием с опубликованными экспериментальными и расчётными данными, а также с результатами расчётов в сертифицированном программном комплексе ANSYS и программы Левина В.Е., реализующей метод конечных и граничных элементов.

Результаты работы обсуждались на: конференциях молодых ученых «Наука.

Технологии. Инновации» (2022, 2023), научных семинарах кафедры «Прочность летательных аппаратов» Новосибирского государственного технического университета (2023, 2024), научном семинаре кафедры «Механика твердого тела» Новосибирского государственного университета под руководством академика РАН д.ф.-м.н. Аннина Б.Д. (2024), семинаре научного направления «Механика деформируемого твердого тела» "Механика макро- и нано-структур" Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева под руководством д.ф.-м.н. Коробейникова С.Н. и д.ф.-м.н. Шутова А.В. (2024), научном семинаре Сибирского научно-исследовательского института авиации имени С. А. Чаплыгина (2024), научном семинаре в Новосибирском Государственном архитектурно-строительном университете (2024), научном семинаре Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук под руководством академика РАН д.т.н. Матвеевко В.П. (2024), международной научно-практической конференции «IX Чаплыгинские чтения», посвящённой 155-летию со дня рождения Сергея Алексеевича Чаплыгина, (2024).

### **Личный вклад автора**

Вывод линейных и нелинейных дифференциальных уравнений статического и динамического деформирования осесимметричных оболочек вращения, разработка методики расчёта гидроупругих колебаний баков, разработка программ для тестовых расчётов на языке Fortran и скриптов ANSYS, проведение тестовых расчётов, исследование достоверности и сходимости полученных результатов.

### **Соответствие паспорту заявленной специальности**

Содержание диссертационной работы соответствует паспорту научной специальности 2.5.14 – «Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов» в части пунктов 1 и 2.

### **Публикации**

Основные результаты работы опубликованы в 3 печатных изданиях, 2 из которых опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК, из которых 1 индексируется в Scopus, 1 – в сборниках трудов конференций.

### **Структура и объем работы**

Диссертация изложена на 142 листах, имеет 64 рисунка, 23 таблицы и 3 приложения. Библиографический список состоит из 137 наименований трудов российских и зарубежных ученых.

### **Основное содержание работы**

**Во введении** обоснована актуальность выбора темы диссертации. Приведены основные цели и задачи исследования. Введены основные положения, выносимые на защиту. Отмечается научная новизна полученных результатов и их практическая значимость. Приведены степень достоверности и апробация результатов работы. Выписаны методология и методы исследования. Показано соответствие паспорту заявленной специальности.

**В первой главе** даётся обзор литературы этапов развития методов расчёта механики оболочки. На основе литературных источников дан краткий обзор методов расчёта деформирования оболочек, методов расчёта колебаний баков с жидкостью и примеры применения радиальных базисных функций.

В данной диссертационной работе разрабатывается альтернативный МКЭ и МГЭ подходам к расчёту тонкостенных оболочечных конструкций, взаимодействующих с

жидкостью. В основе предлагаемой методики лежит прямое решение дифференциальных уравнений с помощью метода конечных разностей, в котором весовые коэффициенты разложения производных на произвольном трафарете (шаблоне) узлов вычисляются с помощью сплайн интерполяций на основе радиальных базисных функций.

**Во второй главе** получены дифференциальные уравнения статического деформирования оболочки вращения с учётом сдвиговой деформации вдоль нормали к деформированной поверхности (рисунок 1):

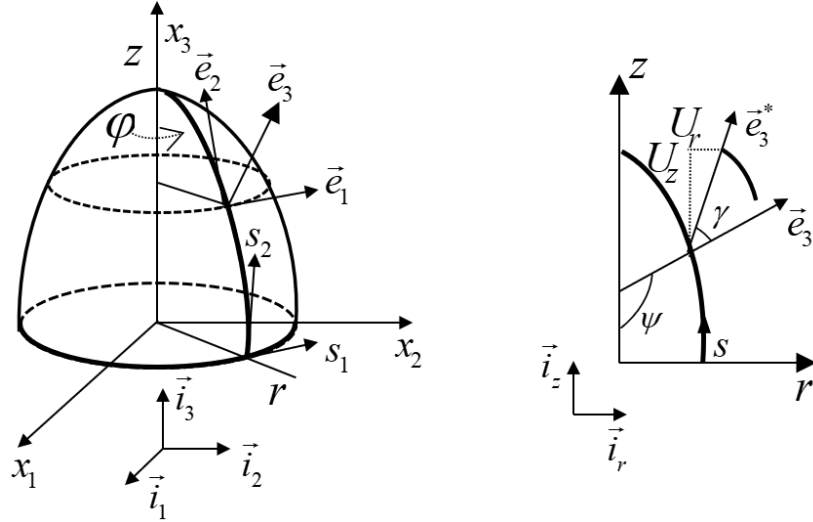


Рисунок 1 — Геометрия и деформирование оболочки вращения

$$1) \frac{d\bar{U}_r}{d\xi} = (1 + \varepsilon_2)(\bar{d}_r + \bar{d}_z\theta) - \bar{r}_{,\xi}, \quad (1)$$

$$2) \frac{d\bar{U}_z}{d\xi} = (1 + \varepsilon_2)(\bar{d}_z - \bar{d}_r\theta) - \bar{z}_{,\xi},$$

$$3) \frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{\bar{s}_{,\xi}}{\bar{h}f_h^3} \bar{M}_{2\varphi} - \nu \bar{s}_{,\xi} \Delta \bar{k}_1, \text{ где } \Delta \bar{k}_1 = \frac{1}{\bar{s}_{,\xi} \bar{r}} [\bar{z}_{,\xi} (\cos \gamma - 1) + \bar{r}_{,\xi} \sin \gamma], \Delta \bar{k}_2 = \frac{\gamma_{,\xi}}{\bar{s}_{,\xi}}; \quad (2)$$

$$4) \frac{d\bar{T}_{2r}}{d\xi} = -A\bar{T}_{2r} + \frac{\bar{s}_{,\xi}}{\bar{r}} B\bar{T}_{1\varphi} - \bar{s}_{,\xi} (1 + \varepsilon_2) \frac{(1 - \nu^2)}{E\bar{h}} q_r, \quad 5) \frac{d\bar{T}_{2z}}{d\xi} = -A\bar{T}_{2z} - \bar{s}_{,\xi} (1 + \varepsilon_2) \frac{(1 - \nu^2)}{E\bar{h}} q_z \quad (3)$$

$$6) \frac{d\bar{M}_{2\varphi}}{d\xi} = -A\bar{M}_{2\varphi} - \frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} B\bar{M}_{1s} - \frac{12}{\bar{h}} (1 + \varepsilon_2) (\bar{T}_{2r} \bar{d}_z - \bar{T}_{2z} \bar{d}_r), \quad (4)$$

дополнительные выражения и обозначения:

$$\bar{d}_r = (\bar{r}_{,\xi} \cos \gamma - \bar{z}_{,\xi} \sin \gamma), \quad \bar{d}_z = (\bar{r}_{,\xi} \sin \gamma + \bar{z}_{,\xi} \cos \gamma), \quad \theta = \frac{E(\bar{d}_z \bar{T}_{2r} - \bar{d}_r \bar{T}_{2z})}{\kappa G(1 - \nu^2) \bar{s}_{,\xi} f_h} \quad (5)$$

$$A = \left( \frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} + \frac{\varepsilon_{1,\xi}}{(1 + \varepsilon_1)} \right), \quad \varepsilon_{1,\xi} = \left( \frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}^2} \bar{U}_r - \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{U}_r}{d\xi} \right), \quad B = \frac{(1 + \varepsilon_2)}{(1 + \varepsilon_1)}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{\bar{r}} \bar{U}_r, \quad \varepsilon_2 = \exp(\hat{\varepsilon}_2) - 1,$$

$$\hat{\varepsilon}_2 = \frac{\bar{T}_{2r} \bar{d}_r + \bar{T}_{2z} \bar{d}_z}{\bar{s}_{,\xi} f_h(\hat{\varepsilon}_2)} - \nu \hat{\varepsilon}_1, \quad f_h(\hat{\varepsilon}_2) = \exp \left[ \frac{\nu}{\nu - 1} (\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2) \right], \quad \hat{\varepsilon}_1 = \ln(1 + \varepsilon_1),$$

$$\bar{T}_{1\varphi} = f_h(\hat{\varepsilon}_1 + \nu \hat{\varepsilon}_2), \quad \bar{M}_{1s} = \bar{h} f_h^3 (\Delta \bar{k}_1 + \nu \Delta \bar{k}_2). \quad (6)$$

где нижний индекс после запятой означает дифференцирование по переменной,  $s = s(\xi)$  — длина меридиана;  $\xi$  — параметр длины;  $r = r(\xi)$ ,  $z = z(\xi)$  — координаты точек меридиана;  $U_r = U_r(\xi)$ ,  $U_z = U_z(\xi)$  — перемещения точек меридиана при деформировании;  $\gamma = \gamma(\xi)$  — угол поворота при деформировании;  $T_{2r} = T_{2r}(\xi)$ ,  $T_{2z} = T_{2z}(\xi)$ ,  $T_{1s} = T_{1s}(\xi)$  — проекции внутреннего продольного усилия;  $M_{2\varphi} = M_{2\varphi}(\xi)$ ,  $M_{1s} = M_{1s}(\xi)$  — внутренние изгибающие моменты;  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $h = h(\xi)$  — толщина оболочки;  $q_r = q_r(\xi)$ ,  $q_z = q_z(\xi)$  — проекции давления, действующего на оболочку,  $\ell$  — характерный геометрический размер оболочки (например: длина меридиана, радиус),  $\hat{\varepsilon}_1$ ,  $\hat{\varepsilon}_2$  — меры деформации,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  — относительные удлинения.

Полученные уравнения (1)–(4), совместно с краевыми условиями, наложенными на функции в начале и конце меридиана, представляют собой краевую задачу. Для решения двухточечной краевой задачи используется подпрограмма BVFPD из библиотеки IMSL в среде Compaq Visual Fortran 6.6. Кроме того, полученные системы уравнений внедрены в код программного комплекса DARSYS<sup>1</sup>, поэтому далее расчёт по полученным уравнениям будет обозначаться этим названием. Для тестирования уравнений статики были рассмотрены несколько простейших задач деформирования под внутренним давлением оболочек вращения: 1) цилиндрическая, 2) сферическая, 3) эллиптическая, 4) коническая, 5) составная конически-цилиндрическая. В качестве эталона для сравнения принимались результаты расчёта в пакете ANSYS, в приложении Б диссертации приведены разработанные скрипты APDL.

1. Рассмотрим задачу о деформировании цилиндрической оболочки под действием внутреннего распределённого давления  $P$ . Радиус  $R = 0.5$  м, толщина  $h = 0.02$  м, высота  $H = 0.7$  м, модуль упругости материала  $E = 20$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ . На рисунке 2 приведены зависимости полного перемещения верхней точки меридиана от числа разбиений, а также деформированные конфигурации, рассчитанные с помощью скрипта APDL в ANSYS и по формулам (1)–(4) в DARSYS при свободном опирании и при защемлении. Из рисунков видно, что результаты хорошо согласуются.

При относительно малых толщинах оболочки влияние сдвиговых деформаций, учтённый формулой (5), мало. Для тестирования работоспособности полученных формул проведём расчёт защемлённой цилиндрической оболочки с увеличенной в 10 раз толщиной —  $h = 0.2$  м с учётом сдвига и без него. На рисунке 3 приведены рассчитанные конфигурации меридиана при давлении  $P = 1.3 \cdot 10^6$  Па и разных коэффициентах Пуассона:  $\nu = 0, 0.3, 0.49$ .

Из рисунка видно, что учёт сдвига по разработанным формулам вносит существенный вклад для толстой оболочки и достаточно хорошо согласуется с расчётами в ANSYS. Необходимо отметить, что наилучшую сходимость результатов с ANSYS показали расчёты с коэффициентом коррекции сдвига  $\kappa = \pi^2 / 12$ .

<sup>1</sup> Красноруцкий Д.А., Лакиза П.А., Шелевая Д.Р. Программный комплекс для моделирования механики системы тонких упругих стержней. Краевые задачи и математическое моделирование // 16-я Всероссийская научная конференция с международным участием "Краевые задачи и математическое моделирование". — Издательство КГПИ КемГУ. — 2023. — С. 57–60.



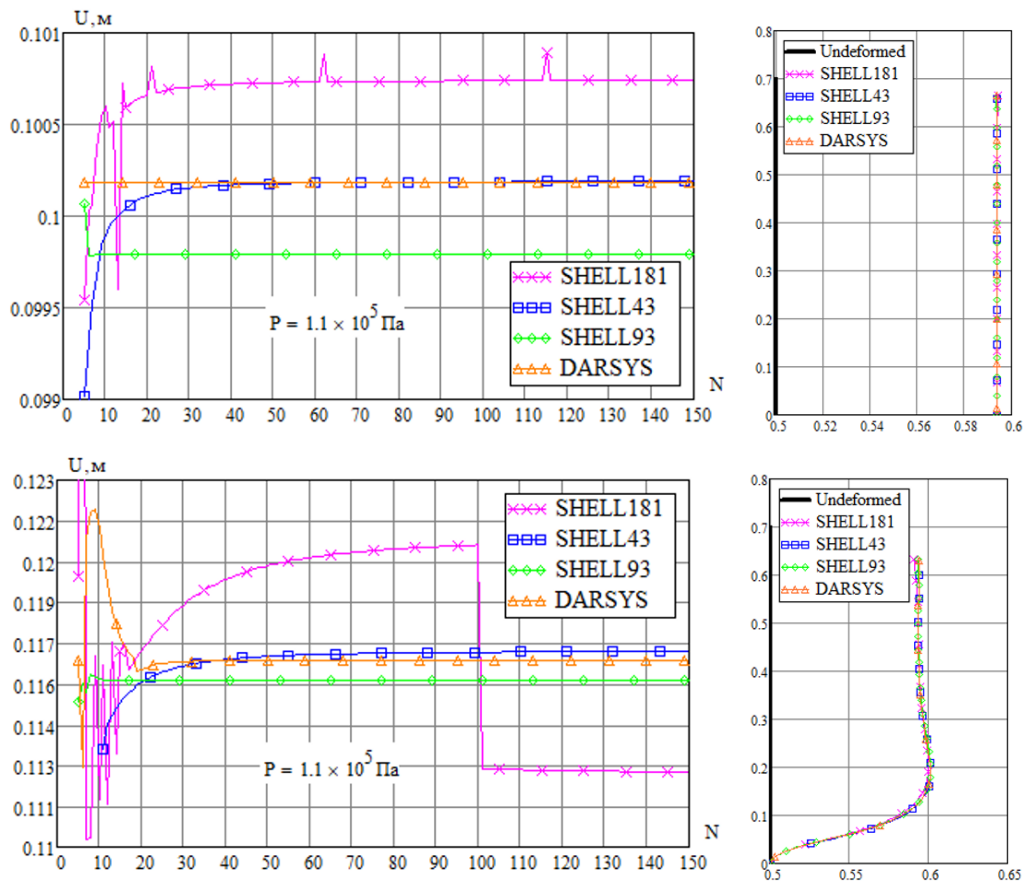


Рисунок 2 — Сходимость перемещения при варьировании числа разбиений и деформированные конфигурации

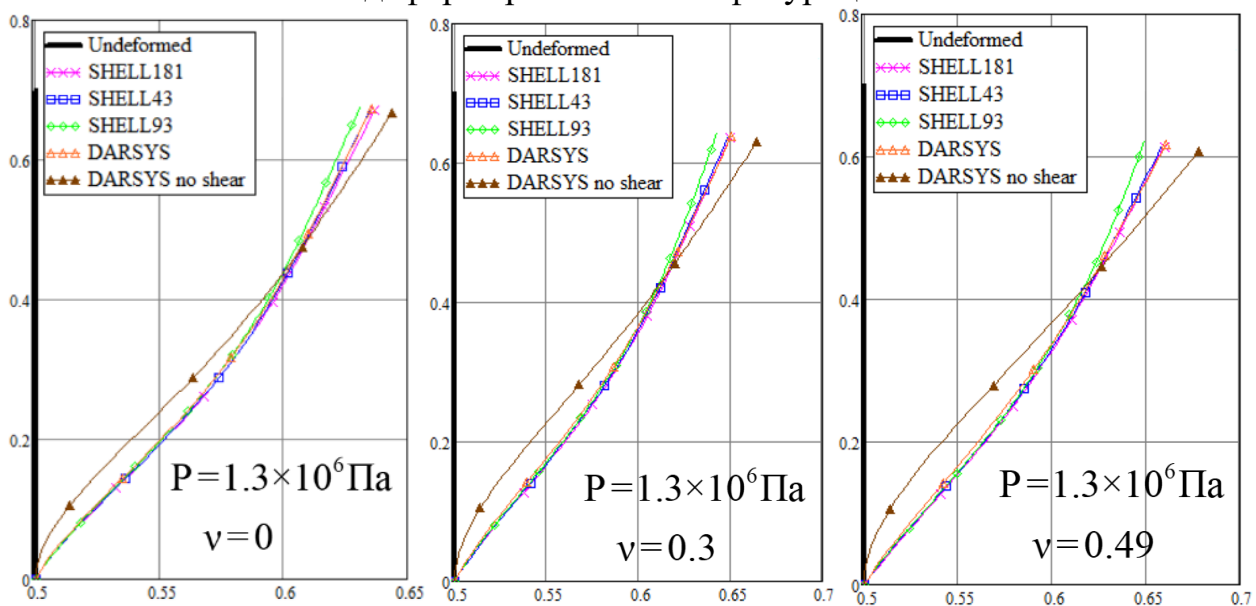


Рисунок 3 — Меридиан закреплённой цилиндрической оболочки. Влияние учёта сдвига при деформировании толстой оболочки

2. Для сферической оболочки радиуса  $R = 0.5\text{ м}$ , толщиной  $h = 0.02\text{ м}$ , на рисунке 4 приведены рассчитанные зависимости полного перемещения точек меридиана от числа разбиений при значении давления  $P = 4 \cdot 10^5\text{ Па}$ .

3. Для эллиптической оболочки с полуосями  $a = 0.4\text{ м}$ ,  $b = 2a$  на рисунке 5 приведены зависимости полного перемещения точки меридиана, лежащей на малой полуоси от числа разбиений, рассчитанные при значении давления  $P = 3.3 \cdot 10^5\text{ Па}$ .

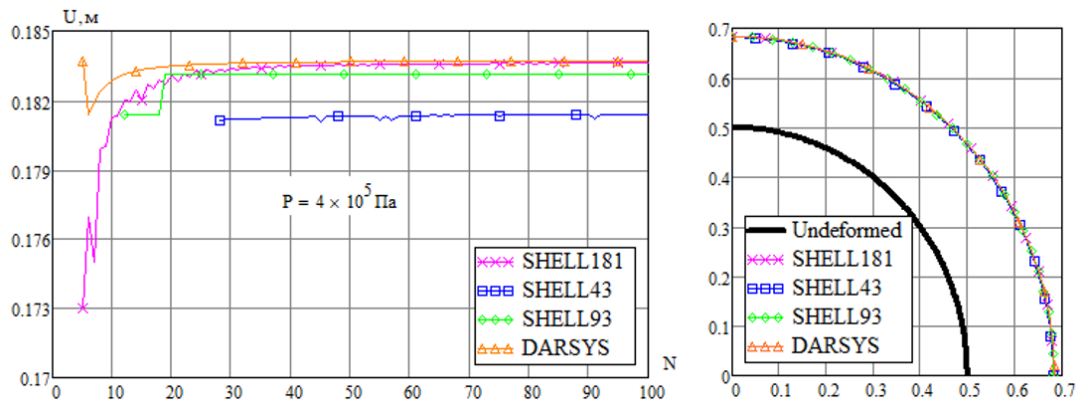


Рисунок 4 — Сходимость перемещения сферической оболочки

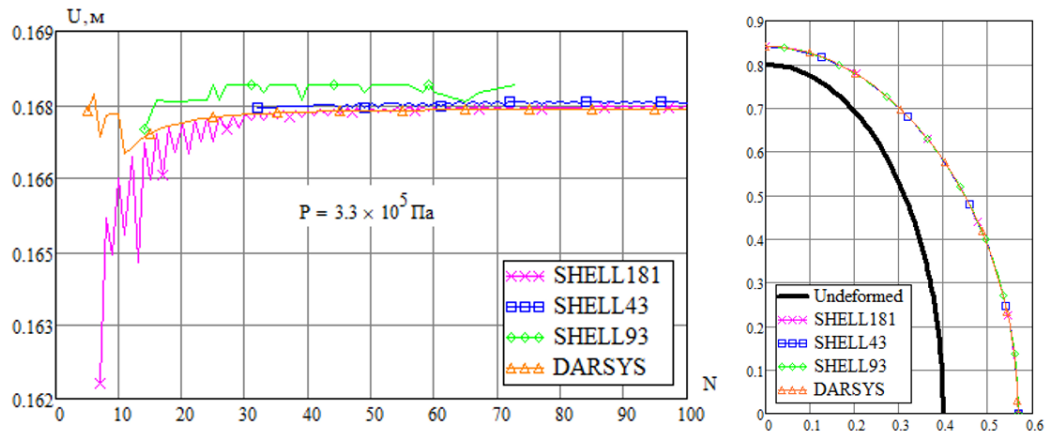


Рисунок 5 — Сходимость перемещения эллиптической оболочки

4. Для конической оболочки (радиус  $R = 0.5$  м, угол конуса  $\varphi = \pi / 6$ ) на рисунке 6 приведены зависимости вертикального перемещения вершины при значении давления  $P = 3.5 \cdot 10^5$  Па.

5. Для составной оболочки (радиус цилиндра  $R = 0.5$  м, высота цилиндра  $H = 0.8$  м, длина образующей конуса  $L = 0.3$  м, угол конусности  $\varphi = \pi / 6$ ) на рисунке 7 приведены зависимости полного перемещения верхней точки меридиана составной оболочки от числа разбиений при давлении  $P = 1.8 \cdot 10^5$  Па.

Из рисунков 2–7 видно, что результаты расчёта перемещений и деформированных конфигураций меридиана хорошо согласуются с ANSYS. Более подробно результаты исследования сходимости, в том числе при варьировании давления, приведены в тексте диссертации.

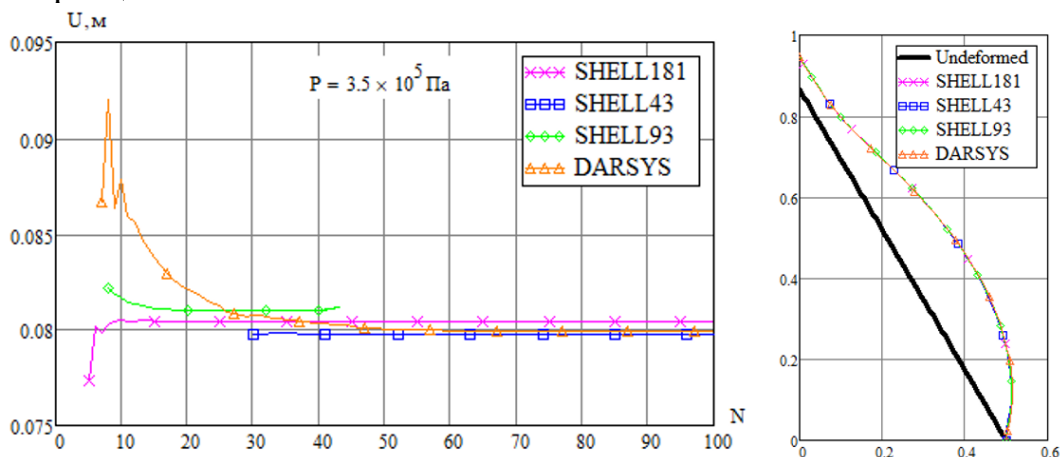


Рисунок 6 — Сходимость перемещения конической оболочки

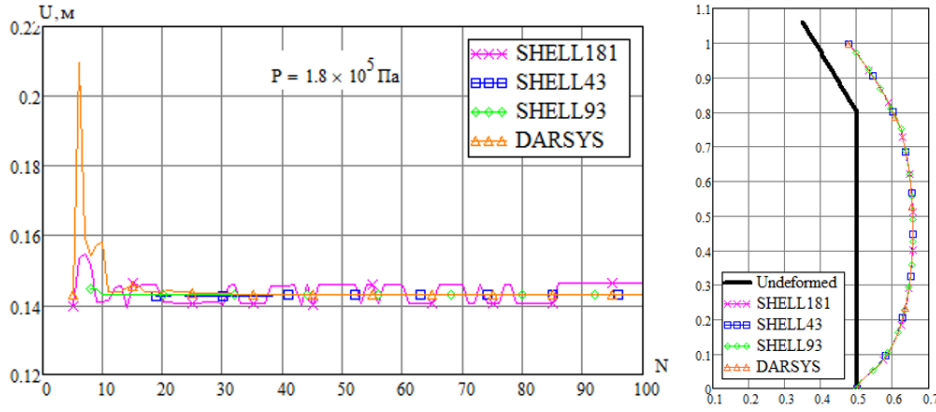


Рисунок 7 — Сходимость перемещения составной оболочки

В третьей главе на основе уравнений статики получены уравнения движения осесимметричной ортотропной оболочки вращения (в смысле динамического равновесия по Даламберу):

$$1) \frac{d\bar{U}_r}{d\xi} = (1 + \varepsilon_2)(\bar{d}_r + \bar{d}_z\theta) - \bar{r}_{,\xi}, \quad 2) \frac{d\bar{U}_z}{d\xi} = (1 + \varepsilon_2)(\bar{d}_z - \bar{d}_r\theta) - \bar{z}_{,\xi}, \quad (7)$$

$$3) \frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{\bar{s}_{,\xi}}{K_2 f_h^3} \frac{\bar{h}_0}{\bar{h}^2} \bar{M}_{2\varphi} - \nu_{12} \bar{s}_{,\xi} \Delta \bar{k}_1, \quad \Delta \bar{k}_1 = \frac{1}{\bar{s}_{,\xi} \bar{r}} [\bar{z}_{,\xi} (\cos \gamma - 1) + \bar{r}_{,\xi} \sin \gamma], \quad \Delta \bar{k}_2 = \frac{\gamma_{,\xi}}{\bar{s}_{,\xi}}; \quad (8)$$

$$4) \frac{d\bar{T}_{2r}}{d\xi} = -A\bar{T}_{2r} + \frac{\bar{s}_{,\xi}}{\bar{r}} B\bar{T}_{1\varphi} - Cq_r + D\ddot{\bar{U}}_r, \quad 5) \frac{d\bar{T}_{2z}}{d\xi} = -A\bar{T}_{2z} - Cq_z + D\ddot{\bar{U}}_z \quad (9)$$

$$6) \frac{d\bar{M}_{2\varphi}}{d\xi} = -A\bar{M}_{2\varphi} - \frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} B\bar{M}_{1s} - \frac{12}{\bar{h}_0} (1 + \varepsilon_2) (\bar{T}_{2r} \bar{d}_z - \bar{T}_{2z} \bar{d}_r) - D \frac{\bar{h}^2}{\bar{h}_0} \ddot{\gamma} \quad (10)$$

дополнительные выражения и обозначения:

$$\bar{d}_r = (\bar{r}_{,\xi} \cos \gamma - \bar{z}_{,\xi} \sin \gamma), \quad \bar{d}_z = (\bar{r}_{,\xi} \sin \gamma + \bar{z}_{,\xi} \cos \gamma), \quad \theta = \frac{\bar{d}_z \bar{T}_{2r} - \bar{d}_r \bar{T}_{2z}}{\kappa G_{23} \bar{s}_{,\xi} \bar{h} f_h K_0}, \quad K_0 = \frac{(1 - \nu_0^2)}{E_0 h_0},$$

$$K_1 = K_0 \frac{E_1 h}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad K_2 = K_0 \frac{E_2 h}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad A = \left( \frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} + \frac{\varepsilon_{1,\xi}}{(1 + \varepsilon_1)} \right), \quad \varepsilon_{1,\xi} = \left( \frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}^2} \bar{U}_r - \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{U}_r}{d\xi} \right),$$

$$B = \frac{(1 + \varepsilon_2)}{(1 + \varepsilon_1)}, \quad C = \bar{s}_{,\xi} \ell K_0 (1 + \varepsilon_2), \quad D = \frac{\bar{s}_{,\xi} \rho \bar{h} \ell^3}{(1 + \varepsilon_1)} K_0, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{\bar{r}} \bar{U}_r, \quad \varepsilon_2 = \exp(\hat{\varepsilon}_2) - 1,$$

$$\hat{\varepsilon}_2 = \frac{\bar{T}_{2r} \bar{d}_r + \bar{T}_{2z} \bar{d}_z}{K_2 \bar{s}_{,\xi} f_h(\hat{\varepsilon}_2)} - \nu_{12} \hat{\varepsilon}_1, \quad f_h(\hat{\varepsilon}_2) = \exp \left[ \frac{\nu_{12} \nu_{23} + \nu_{13}}{\nu_{12} \nu_{21} - 1} \hat{\varepsilon}_1 + \frac{\nu_{21} \nu_{13} + \nu_{23}}{\nu_{12} \nu_{21} - 1} \hat{\varepsilon}_2 \right],$$

$$\bar{s} = \frac{s}{\ell}, \quad \bar{h} = \frac{h}{\ell}, \quad \bar{r} = \frac{r}{\ell}, \quad \bar{z} = \frac{z}{\ell}, \quad \bar{h}_0 = \frac{h_0}{\ell}, \quad \bar{U} = \frac{U}{\ell}, \quad \bar{T} = \frac{(1 - \nu_0^2)}{E_0 h_0} T, \quad \bar{M} = \frac{12(1 - \nu_0^2)}{E_0 h_0^2} M,$$

$$\hat{\varepsilon}_1 = \ln(1 + \varepsilon_1), \quad \bar{T}_{1\varphi} = K_1 f_h(\hat{\varepsilon}_1 + \nu_{21} \hat{\varepsilon}_2), \quad \bar{M}_{1s} = K_1 \frac{\bar{h}^2}{\bar{h}_0} f_h^3(\Delta \bar{k}_1 + \nu_{21} \Delta \bar{k}_2), \quad (11)$$

где  $h_0$  — характерная толщина (например, максимальная из всех толщин),  $\nu_0$  — характерный коэффициент Пуассона (например, равный 0.3),  $E_0$  — характерный модуль Юнга, который можно выбрать как максимальных из всех используемых материалов в рассматриваемой группе оболочек,  $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}$  — соответственно

модули упругости и коэффициенты Пуассона,  $\ddot{\gamma}$  — угловое ускорение,  $\ddot{U}_r, \ddot{U}_z$  — проекции вектора ускорения на направления осей.

Уравнения движения (7)–(10) можно переписать в матричном виде  $\frac{d\mathbf{X}}{d\xi} = \mathbf{F}(\xi, \mathbf{X}, \ddot{\mathbf{X}})$ , где  $\mathbf{X}(\xi, t) = \{U_r, U_z, \gamma, T_{2r}, T_{2z}, M_{2\varphi}\}^T$ . Разложим их в ряд Тейлора в

окрестности точки  $(\mathbf{X}, \ddot{\mathbf{X}})$ , вычтем равновесное состояние:  $\frac{d\Delta\mathbf{X}}{d\xi} = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{X}}\Delta\mathbf{X} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\ddot{\mathbf{X}}}\Delta\ddot{\mathbf{X}}$  где

$\Delta\mathbf{X}(\xi, t) = \{\Delta U_r, \Delta U_z, \Delta\gamma, \Delta T_{2r}, \Delta T_{2z}, \Delta M_{2\varphi}\}^T$ . Решение ищем в экспоненциальном виде

$\Delta\mathbf{X}(\xi, t) = \Delta\mathbf{X}^A(\xi) \cdot \exp(i\omega t)$ , тогда для амплитуд получим уравнение

$\frac{d\Delta\mathbf{X}^A}{d\xi} = \left[ \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{X}} - \omega^2 \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\ddot{\mathbf{X}}} \right] \Delta\mathbf{X}^A$ . Добавим краевые условия. Применим МКР, получим

матричную обобщённую проблему собственных значений для узловых значений амплитуд значений малых колебаний:

$$(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{C})\mathbf{x} = 0, \text{ где } \mathbf{x} = \{\Delta\mathbf{X}_1^A, \Delta\mathbf{X}_1^A, \dots, \Delta\mathbf{X}_{N+1}^A\}^T \quad (12)$$

Для учёта идеальной несжимаемой жидкости при колебаниях оболочки используется потенциал перемещений  $\varphi$ . Давление жидкости на стенку  $p = -\rho_{ж}\varphi\omega^2$ , где  $\rho_{ж}$  — плотность жидкости,  $\omega$  — частота собственных колебаний. На поверхности жидкости  $\varphi = 0$ , на оси симметрии равно нулю перемещение, на смоченной части условие равенства перемещений жидкости и меридиана оболочки. На смоченной части — условие совместности перемещения по нормали. На оси симметрии — отсутствие перемещений (рисунок 8).

Для решения краевой задачи расчётная область, занятая жидкостью, неравномерно заполняется узлами, область имеет сгущение в месте контакта с оболочкой (рисунок 9). Для каждого узла из ближайших соседей строится трафарет (шаблон) и применяется метод конечных разностей на основе сплайн-интерполяции радиальной базисной функцией  $\phi(r) = r^{2m} \ln(r)$ , где  $r = (x, y)$ .

Записывается интерполирующий сплайн для аппроксимации дифференциального оператора  $L$  в точке  $(x_c, y_c)$ :  $\sum_{j=1}^n w_j f_j = L S(x, y) \Big|_{\substack{x=x_c \\ y=y_c}}$ . Весовые коэффициенты

вычисляются из решения СЛАУ:

$$\begin{bmatrix} \phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_1) & \phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) & \dots & \phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_n) & 1 & x_1 & y_1 \\ \phi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) & \phi(\vec{r}_2 - \vec{r}_2) & \dots & \phi(\vec{r}_2 - \vec{r}_n) & 1 & x_2 & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi(\vec{r}_n - \vec{r}_1) & \phi(\vec{r}_n - \vec{r}_2) & \dots & \phi(\vec{r}_n - \vec{r}_n) & 1 & x_n & y_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \\ w_{n+1} \\ w_{n+2} \\ w_{n+3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L\phi(\vec{r} - \vec{r}_1) \\ L\phi(\vec{r} - \vec{r}_2) \\ \dots \\ L\phi(\vec{r} - \vec{r}_n) \\ L1 \\ Lx \\ Ly \end{Bmatrix} \Big|_{\substack{x=x_c \\ y=y_c}} \quad (13)$$

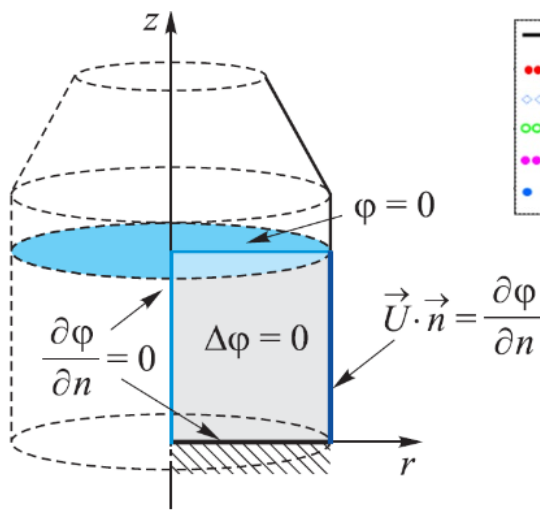


Рисунок 8 — Расчётная схема бака с жидкостью

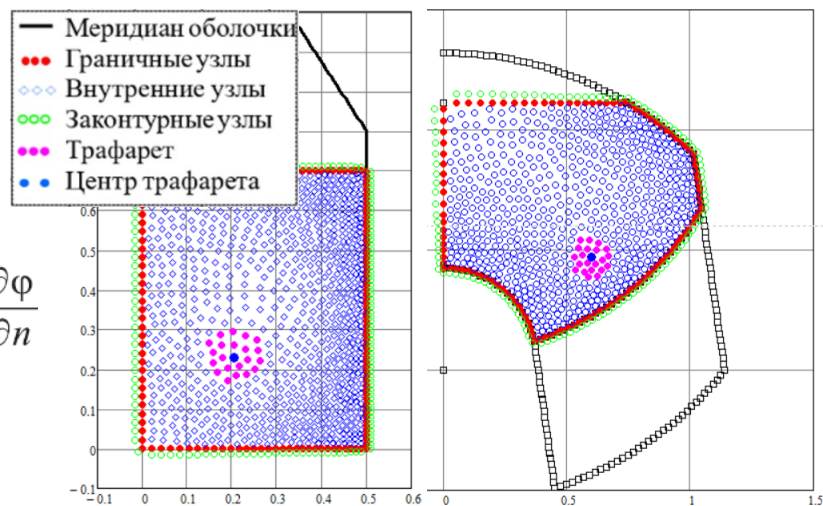


Рисунок 9 — Примеры заполнения расчётной области узлами

Матричная обобщённая проблема собственных значений (12) переписывается следующим образом:

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{L} & \mathbf{\Phi} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{R} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{\Phi} \end{Bmatrix} = 0, \text{ или } (\bar{\mathbf{A}} - \omega^2 \bar{\mathbf{C}}) \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{\Phi} \end{Bmatrix} = 0, \quad (14)$$

где  $\mathbf{L}$  – матрица, образованная связями  $\vec{U} \vec{n} = \partial \varphi / \partial n$ ;  $\mathbf{R}$  – матрица, образованная связями  $\vec{T}_2 \vec{n} = -\rho_{ж} \varphi \omega^2$ ;  $\mathbf{\Phi}$  – матрица, построенная на РБФ-КР аппроксимации уравнения Лапласа  $\Delta \varphi = 0$ , а также краевых условий  $\varphi = 0$  и  $\partial \varphi / \partial n$ .

Полученная обобщённая проблема (14) решается с помощью пакета подпрограмм с открытым исходным кодом ARPACK в DARSYS. Алгоритм решения уравнений ортотропной осесимметричной оболочки совместно с жидкостью добавлен в функциональные возможности программы DARSYS.

**В четвёртой главе** рассмотрены тестовые задачи расчёта колебаний баков.

1. Рассмотрим тестовую задачу из статьи<sup>2</sup>, полусферический открытый бак, заполнен водой, шарнирно закреплён по радиусу. Радиус  $R = 5.08\text{ м}$ , толщина —  $0.0254\text{ м}$ , модуль упругости  $E = 7 \cdot 10^{10}\text{ Па}$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ , плотность материала  $\rho = 2770\text{ кг/м}^3$ .

В таблице 1 приведены три низшие частоты осесимметричных гидроупругих колебаний, рассчитанные различными методами в разных программах. Три первые столбца с частотами взяты из статьи<sup>3</sup>, в которой нет информации о сходимости в зависимости от дискретизации модели. В таблице 1 в четвёртом столбце приведены частоты, которые практически не меняются при увеличении числа конечных и граничных элементов, при расчёте в программе Левина В.Е.<sup>4</sup> по МКЭ-МГЭ. В пятом столбце приведены частоты, рассчитанные в ANSYS Workbench 14.5 при ~50 разбиениях вдоль меридиана.

<sup>2</sup> Гончаров Д.А., Пожалостин А.А., Кокушкин В.В. Моделирование осесимметричных колебаний упругого бака с жидкостью с учетом сил поверхностного натяжения посредством механического аналога // Наука и образование МГТУ им. Баумана. — 2015. — № 6. — С. 372–383. DOI: 10.7463/0615.0779724.

<sup>3</sup> Мокеев В.В. Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов // Известия РАН. Механика твердого тела. — 1998. — № 6. — С. 166–174.

<sup>4</sup> Левин В.Е. Метод конечных и граничных элементов в динамике конструкций летательных аппаратов: дисс. ... д-ра тех. Наук: 05.07.03 / Левин Владимир Евгеньевич. — Новосибирский государственный технический университет, 2001. — 341 с.

Таблица 1 — Частоты полусферической оболочки с водой, Гц

Тон	МКЭ-МГЭ <sup>2</sup>	МКЭ <sup>3</sup>	ANSYS <sup>3</sup> (Shell63)	МКЭ-МГЭ <sup>4</sup>	ANSYS (Shell181, Fluid80)	DARSYS
1	23.59	22.00	22.07	22.04	22.33	20.30
2	35.70	33.38	33.41	33.32	33.71	35.17
3	43.92	42.02	41.30	41.10	39.09	40.64

Из таблицы видно, что расхождение в первой частоте между разными методами достигает 16%. Для анализа сходимости были проведены расчёты с разной дискретизацией модели. На рисунке 10 приведены графики сходимости рассчитанных частот в ANSYS и по разработанной методике. Из рисунка видно, что графики пересекаются с ростом числа разбиений. Сходимости частот в ANSYS Workbench 14.5 (Shell181+Fluid80) получить не удалось, а частоты, рассчитанные по предлагаемой методике, имеют выраженную асимптотику при увеличении числа разбиений меридиана. На рисунке 11 приведена первая форма колебаний с разным числом узлов расчётной области.

На рисунках 12 и 13 приведены зависимости низшей частоты от дискретизации меридиана для различных размеров трафарета конечных разностей  $n = 15, 22, 50$  для степеней чётных полигармонических РБФ  $m = 1$  и  $m = 2$  соответственно. Из рисунков видно, что область разброса вычисляемых частот при изменении дискретизации меньше для  $m = 2$ .

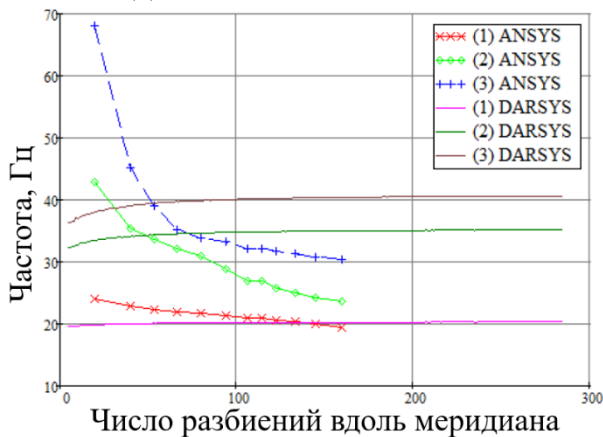


Рисунок 10 — Сходимость трёх низших частот

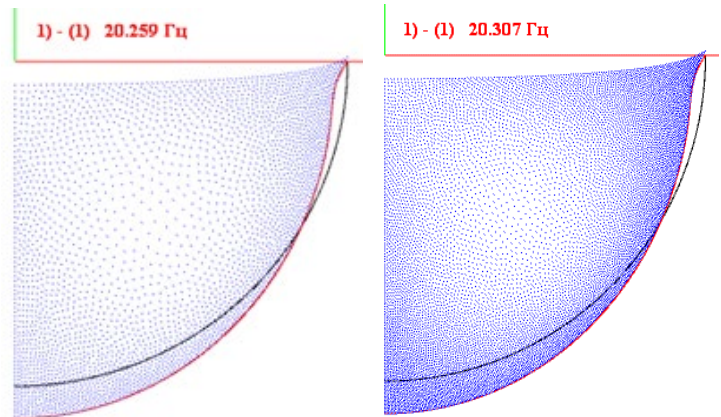


Рисунок 11 — Первая форма колебаний с различной дискретизацией

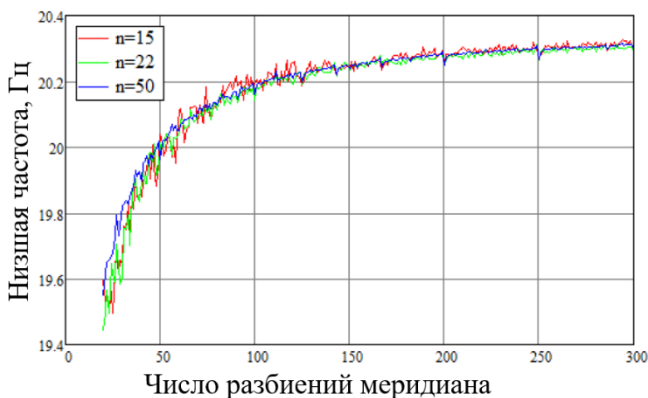


Рисунок 12 — Низшая частота,  $m=1$

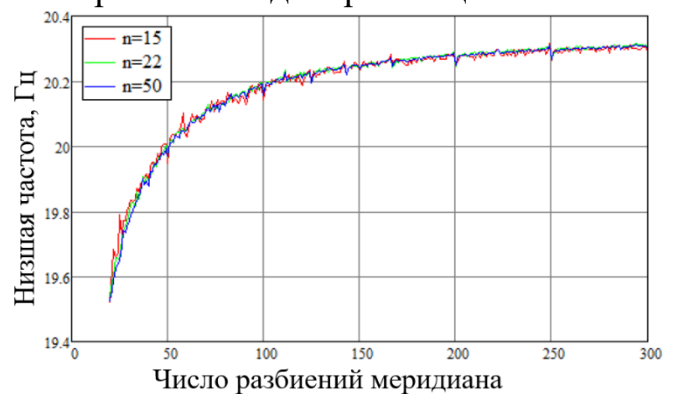


Рисунок 13 — Низшая частота,  $m=2$

2. Рассмотрим тороидальный бак наполовину заполненный водой, образующая окружность имеет радиус 0.5м, внутренний радиус — 0.5м, внешний — 1.5м.

Толщина оболочки — 0.02м, изотропный материал: модуль упругости —  $2 \cdot 10^7$  Па , коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ , плотность —  $7850 \text{ кг/м}^3$ .

Тор шарнирно закреплён по внешнему радиусу. На рисунке 14 приведены формы колебаний, рассчитанные по МКЭ-МГЭ и по предлагаемой методике. В таблице 2 приведено сравнение первых шести частот осесимметричных колебаний. Из таблицы видно, что частоты близки.

На рисунке 15 приведены зависимости трёх низших частот от числа разбиений меридиана, рассчитанные в DARSYS. Из рисунка видно, что частоты стремятся к горизонтальным прямым с ростом числа разбиений без заметных осцилляций.

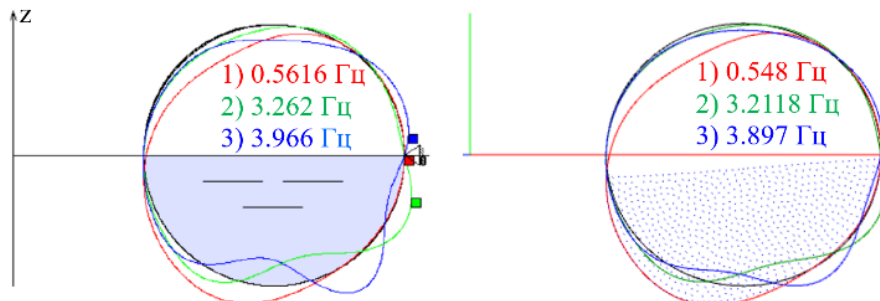


Рисунок 14 — Формы трёх низших тонов осесимметричных колебаний тора

Таблица 2 — Частоты колебаний тороидального бака с водой, Гц

Тон	МКЭ-МГЭ <sup>4</sup>	DARSYS	Разница, %
1	0.562	0.548	2.42
2	3.262	3.212	1.53
3	3.965	3.897	1.72
4	4.499	4.493	0.14
5	5.219	5.174	0.87
6	6.065	5.937	2.12

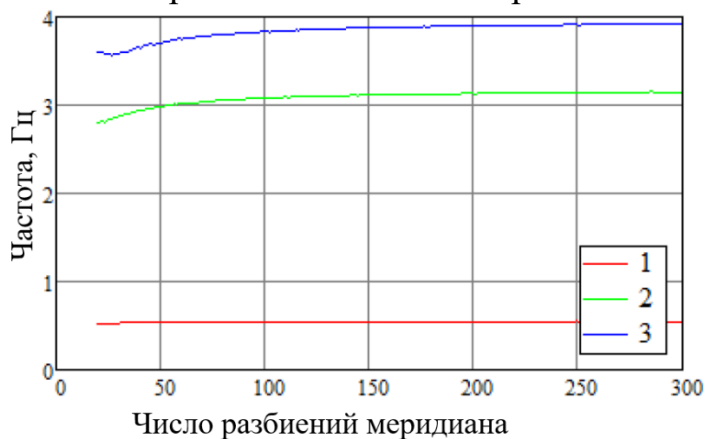


Рисунок 15 — Сходимость частот гидроупругих колебаний

3. Рассмотрим тестовый расчёт связки двух цилиндрических баков с полусферическим дном с различным наполнением водой: а) пустые баки, б) уровень 1м, в) уровень 2м, г) уровень 3.5м. Радиус полусферы и цилиндра — 1м, высота цилиндрических частей — 3м. Бак составлен из 4х участков, пронумерованных на рисунке красными цифрами. Толщина оболочек — 5мм, материал изотропный: модуль упругости —  $7 \cdot 10^{10}$  Па, коэффициент Пуассона — 0.3, плотность —  $2700 \text{ кг/м}^3$ . На рисунках 16 и 17 приведены формы трёх низших тонов колебаний, полученных по МКЭ-МГЭ (слева) и в DARSYS (справа) для разных уровней заполнения.

Для расчётных случаев а)-б) имеется хорошее соответствие как частот, так и форм. Наибольшее визуальное различие имеет вторая форма колебаний для расчётных случаев в)-г), это можно объяснить кардинальным различием используемых подходов к расчёту и разным числом степеней свободы задачи. На рисунке 18 приведены отличия частот цилиндрических баков, рассчитанные по МКЭ-МГЭ в программе Левина В.Е. и по разработанной методике в DARSYS. Из рисунка видно, что результаты хорошо согласуются без жидкости. При больших уровнях заливки появляются существенные расхождения, которые для отдельных тонов колебаний достигают 15%, но в среднем отличие варьируется в пределах 5%.

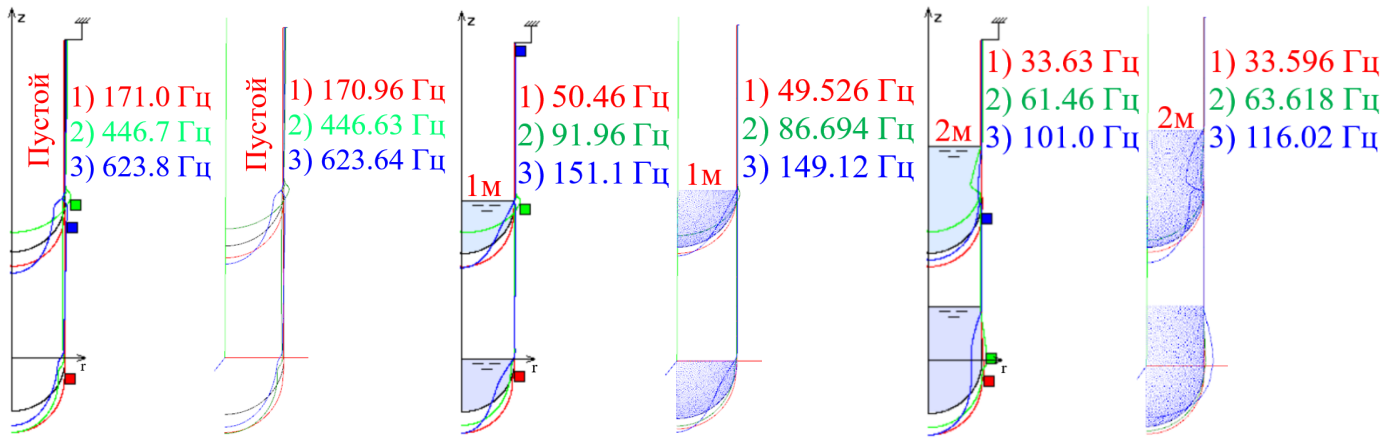


Рисунок 16 — Формы колебаний цилиндрических баков

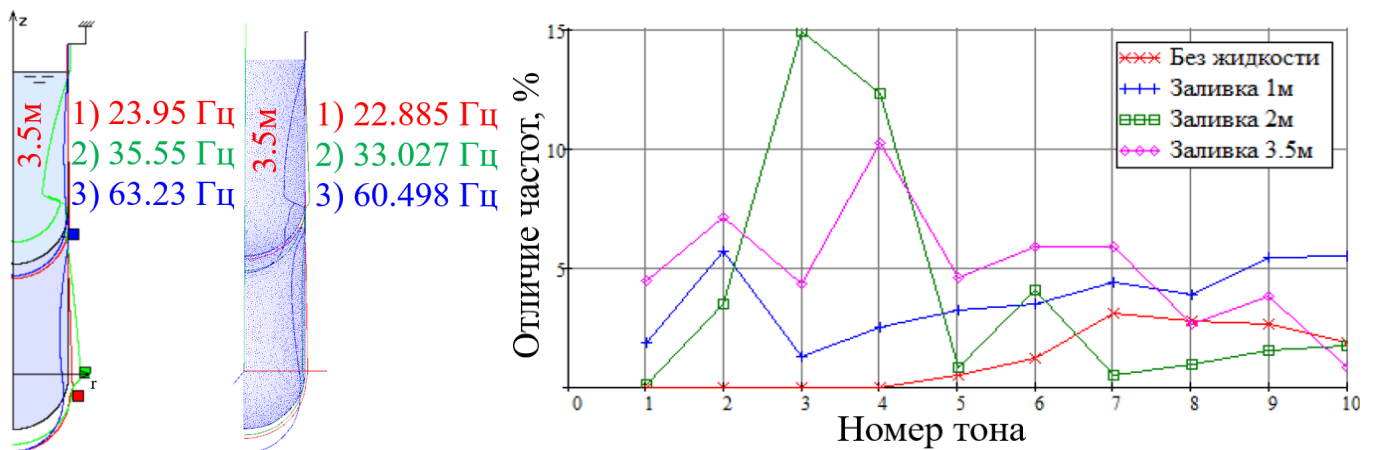


Рисунок 17 — Формы колебаний цилиндрических баков

Рисунок 18 — Отличие частот баков с полусферическим дном, рассчитанных по МКЭ-МГЭ и DARSYS для разных уровней заливки

2. Рассмотрим другой пример, тороидальный бак имеет сферическое промежуточное днище. Внутренний радиус тора – 1м, внешний радиус – 2м, длина цилиндрической части – 1м, радиусы полусфер – 0.5м. Схожую конструкцию имеет внешняя связка топливного бака и бака с окислителем разгонного блока Бриз-М.

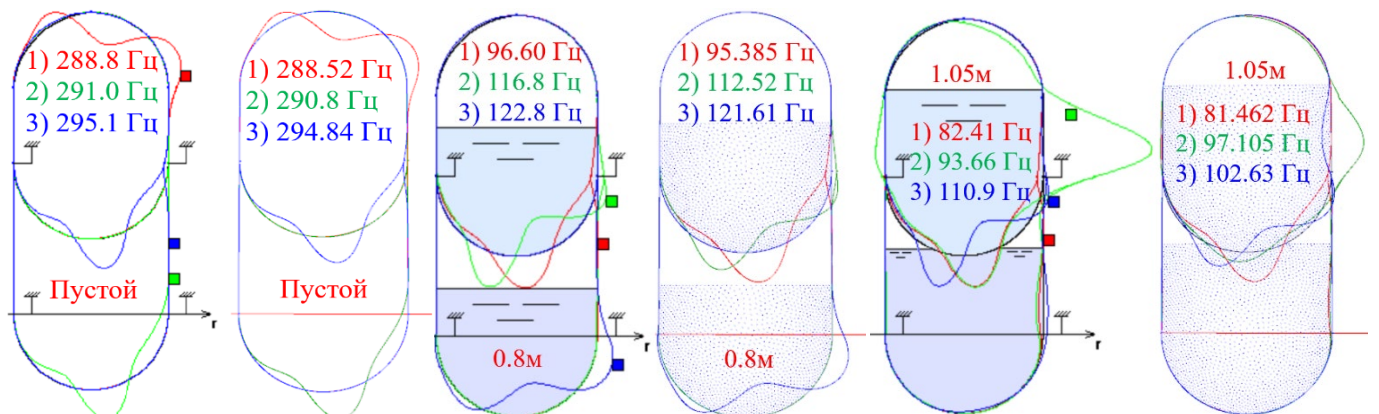


Рисунок 19 — Формы низших тонов колебаний



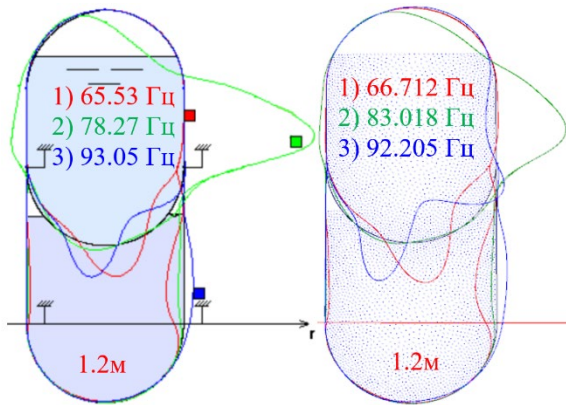


Рисунок 20 — Формы низших тонов колебаний

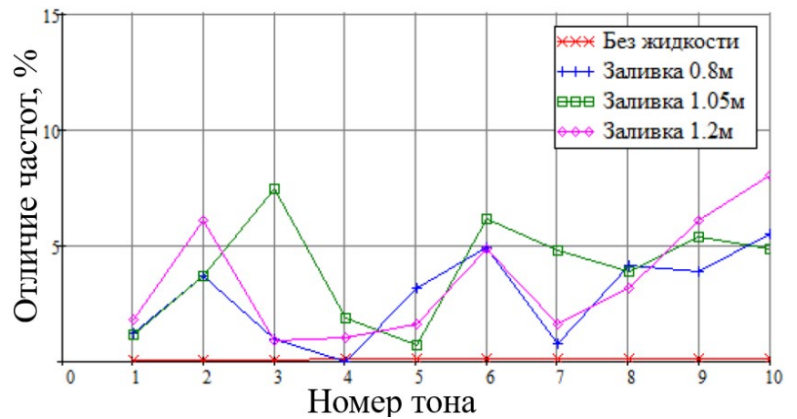


Рисунок 21 — Отличие частот тороидального бака с промежуточным днищем

Для тестовых расчётов приняты следующие характеристики: толщина оболочек — 1 см, материал изотропный: модуль упругости —  $7 \cdot 10^{10}$  Па, коэффициент Пуассона — 0.3, плотность —  $2750 \text{ кг/м}^3$ . Плотность жидкости в нижнем баке —  $761.46 \text{ кг/м}^3$ , в верхнем —  $1422 \text{ кг/м}^3$ . Шпангоуты выполнены из того же материала, что и остальные оболочки, установлены в узлах 1,2,4 и 5 и имеют площадь поперечного сечения  $0.001 \text{ м}^2$ , выполняют функцию крепления только в вертикальном направлении. Рассмотрим несколько случаев заливки от нижней точки баков: а) пустые баки, б) уровень 0.8м, в) уровень 1.05м, г) уровень 1.2м.

На рисунках 19 и 20 приведены формы трёх низших тонов колебаний при разных заливках. Визуально формы совпадают с точностью до соответствующих масштабов. На рисунке 21 в виде графиков приведены отличия частот тороидального бака с промежуточным днищем. Как и в предыдущем примере, для первого расчётного случая без жидкости имеется очень хорошее соответствие, что может служить подтверждением корректности повторения исходных данных в разных программах, а также адекватности разработанной модели. При расчёте гидроупругих колебаний разница в частотах достигает 8%.

3. Рассмотрим тестовый расчёт тороцилиндрического бака с промежуточным днищем, похожего на центральный бак разгонного блока Бриз-М. На рисунке 22 приведены расчётные случаи с разным уровнем заливки топлива и окислителя. Плотность жидкости в нижнем баке —  $761.46 \text{ кг/м}^3$ , в верхнем —  $1422 \text{ кг/м}^3$ . Материал бака ортотропный, модуль упругости материала в окружном направлении  $E_1 = 80 \text{ ГПа}$ , в меридиональном  $E_2 = 60 \text{ ГПа}$ , коэффициент Пуассона  $\nu_{12} = 0.35$ , плотность —  $2804 \text{ кг/м}^3$ . Материал шпангоутов изотропный: модуль упругости  $E = 7.63 \cdot 10^{10}$  Па, коэффициент Пуассона — 0.3, плотность принята равной нулю, но имеется дополнительная масса, распределённая по соответствующему радиусу. Полная информация о принятых для расчёта исходных данных указана в тексте диссертации.

На рисунке 22 приведены формы трёх низших тонов колебаний, рассчитанные по МКЭ-МГЭ и по разработанной методике для разных уровней заливки. Визуально формы совпадают с точностью до соответствующих масштабов. На рисунке 23 приведено отличие частот. Разница в частотах в среднем порядка 5%, но при большой заливке достигает 9.5%.

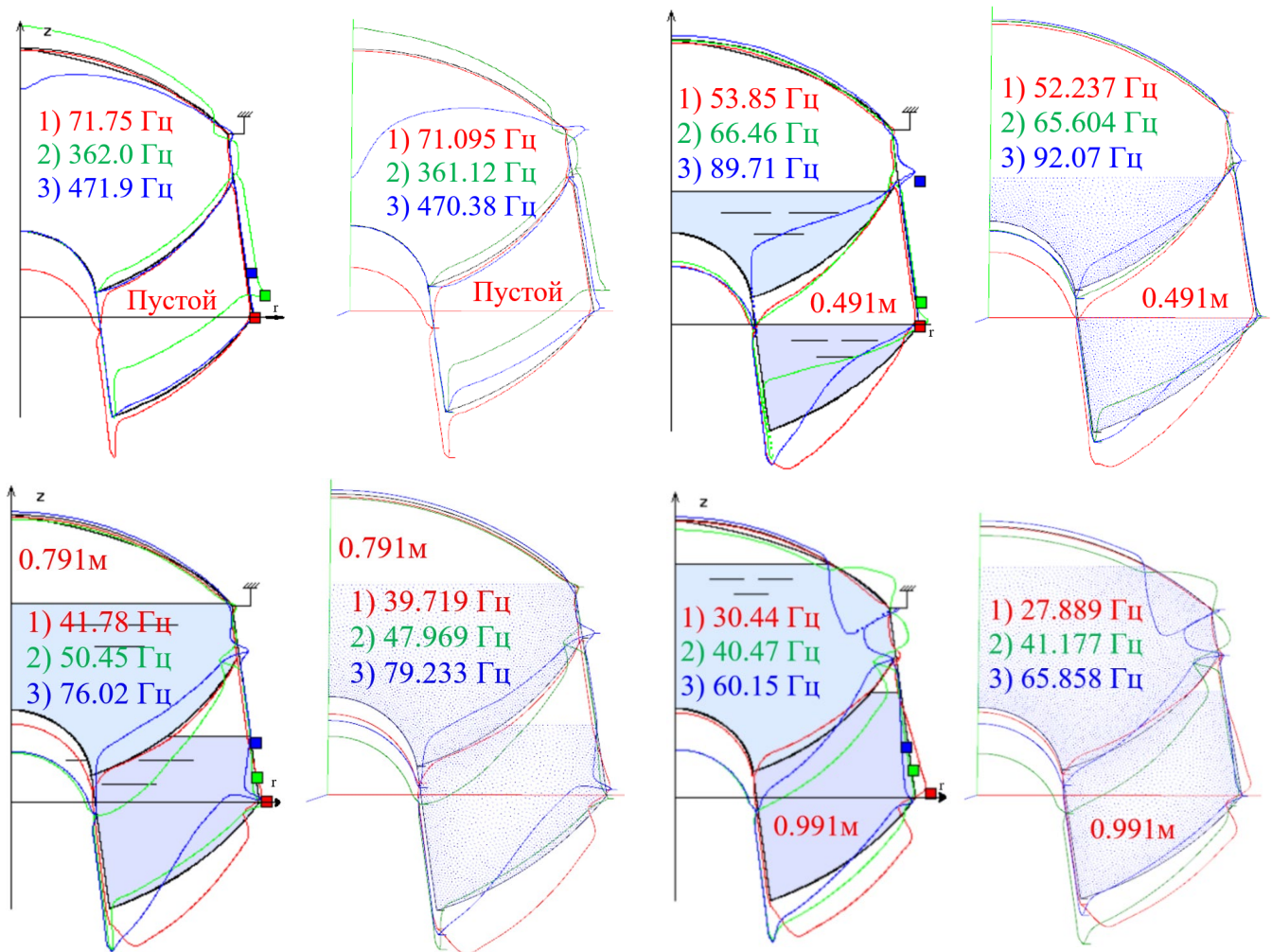


Рисунок 22 — Формы низших тонов колебаний тороцилиндрического бака

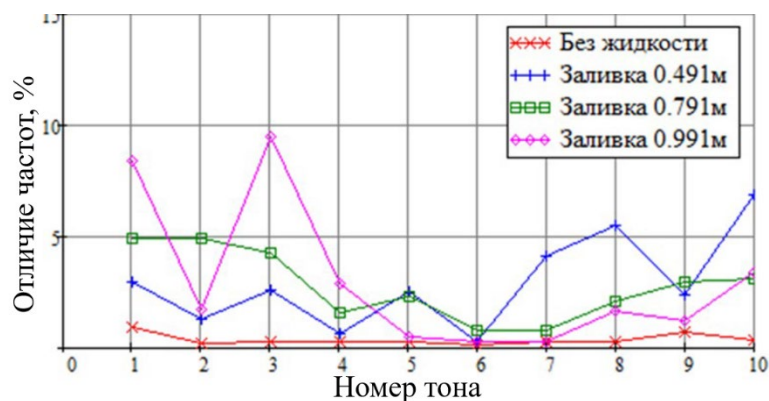


Рисунок 23 — Отличие частот тороцилиндрического бака

### Заключение

1. Из общей системы уравнений движения оболочки, записанной для разрешающих функций в глобальной системе координат, представлен вывод системы уравнений ортотропной осесимметричной оболочки, описывающих геометрически линейное и нелинейное деформирование с учётом утонения/утолщения, поперечного сдвига и больших продольных деформаций. Для тестирования полученных уравнений разработана программа на языке Fortran, а также скрипт APDL для получения параметрических решений в ANSYS с разными типами конечных элементов. Проведено тестирование полученных уравнений на примерах статического деформирования нескольких оболочек канонической формы, исследована

сходимость результатов, получено хорошее соответствие.

2. На основе полученной системы уравнений движения сформулирована краевая задача о гидроупругих колебаниях оболочки с идеальной несжимаемой жидкостью, которая описывается потенциалом перемещений. Для решения применён метод конечных разностей: на меридиане оболочки применяется центральная разность, а в области, занятой жидкостью, весовые коэффициенты разложения уравнения Лапласа и граничных условий вычисляются с помощью сплайн-интерполяции на основе полигармонических радиальных базисных функций. Методика решения внедрена в программный комплекс DARSYS (автор Красноруцкий Д.А.).

3. Проведены тестовые расчёты колебаний баков простой и сложной формы, в том числе связок баков, подкреплённых шпангоутами с дополнительными массами от агрегатов, результаты сопоставлены с опубликованными данными, а также рассчитанными в ANSYS и программе Левина В.Е., реализующей МКЭ-МГЭ. Получено удовлетворительное соответствие. Приведенные расчётные данные могут быть использованы другими исследователями для тестирования существующих и новых подходов к решению задач осесимметричных гидроупругих колебаний баков.

4. Разработанная методика, реализованная в программе DARSYS, может использоваться для расчёта частот и форм продольных колебаний жидкостных баков с произвольной формой меридиана, а также связок баков и баков с промежуточными днищем, подкреплённых шпангоутами и дополнительными массами, имитирующими подвеску двигателя и других агрегатов. Получаемые частоты и формы колебаний являются исходными данными для решения задачи о продольной устойчивости ракет-носителей на активном участке полёта.

#### **Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы**

Разработанный подход к расчёту частот гидроупругих колебаний осесимметричных ортотропных оболочек с помощью РБФ-КР (RBF-FD) может быть применён в расчёте общего случая пространственных оболочек и пластин, а также обладает потенциалом развития, в частности, для получения непосредственной оценки достигнутого решения и улучшения этого решения методом отложенной коррекции.

#### **Основное содержание работы отражено в следующих публикациях:**

1. Нгуен, К. М. Расчет статического деформирования осесимметричных оболочек вращения по дифференциальной модели / К. М. Нгуен, Д. Р. Шелевая, Д. А. Красноруцкий // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 1. – С. 75–95. – DOI 10.15593/perm.mech/2024.1.07. (*Scopus*)

2. Нгуен, К. М. Методика расчета осесимметричных колебаний оболочек вращения с жидкостью по дифференциальной модели / К. М. Нгуен, Д. Р. Шелевая, Д. А. Красноруцкий // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2024. – № 2(146). – DOI 10.18698/2308-6033-2024-2-2338.

3. Нгуен, К. М. Расчет осесимметричных оболочек вращения по дифференциальной модели / К. М. Нгуен, Д. А. Красноруцкий // Наука. Технологии. Инновации : Сборник научных трудов XVI Всероссийской научной конференции молодых ученых. В 11-и частях, Новосибирск, 05–08 декабря 2022 года / Под редакцией А.С. Казьминой. Том Часть 11. – Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2022. – С. 40–44.

Отпечатано в типографии  
Новосибирского государственного технического университета  
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20  
Тел./факс: (383) 346-08-07 Подписано в печать 06.05.2024 г. Заказ № Р-03253.  
Формат 60x90 1/16. Объем 1.25 п.л. Тираж 120 экз.